cermat

MATEMATIKA

MAMZD20C0T01

DIDAKTICKÝ TEST

Maximální bodové hodnocení: 50 bodů
Hranice úspěšnosti: 33 %

1 Základní informace k zadání zkoušky

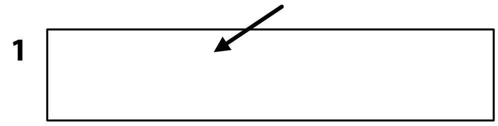
- **Didaktický test** obsahuje **26 úloh**.
- **Časový limit** pro řešení didaktického testu je **uveden na záznamovém archu**.
- **Povolené pomůcky:** psací a rýsovací potřeby, Matematické, fyzikální a chemické tabulky a kalkulátor bez grafického režimu, bez řešení rovnic a úprav algebraických výrazů. Nelze použít programovatelný kalkulátor.
- U každé úlohy je uveden maximální počet bodů.
- Odpovědi pište do záznamového archu.
- Poznámky si můžete dělat do testového sešitu, nebudou však předmětem hodnocení.
- **Nejednoznačný nebo nečitelný zápis odpovědi bude považován za chybné řešení.**
- První část didaktického testu (úlohy 1–15) tvoří **úlohy otevřené**.
- Ve druhé části didaktického testu (úlohy 16–26) jsou uzavřené úlohy, které obsahují nabídku odpovědí. U každé úlohy nebo podúlohy je **právě jedna odpověď správná**.
- Za neuvedené řešení či za nesprávné řešení úlohy jako celku **se neudělují záporné body**.

2 Pravidla správného zápisu odpovědí

- Odpovědi zaznamenávejte **modře nebo černě** píšící propisovací tužkou, která píše **dostatečně silně a nepřerušovaně**.
- Budete-li rýsovat obyčejnou tužkou, následně obtáhněte čáry propisovací tužkou.
- Hodnoceny budou **pouze odpovědi uvedené v záznamovém archu**.

2.1 Pokyny k otevřeným úlohám

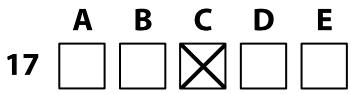
- Výsledky **pište čitelně** do vyznačených bílých polí.



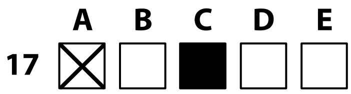
- Je-li požadován celý postup řešení, uveďte jej do záznamového archu. Pokud uvedete pouze výsledek, nebudou vám přiděleny žádné body.
- **Zápisy uvedené mimo** vyznačená bílá pole **nebudou hodnoceny**.
- Chybný zápis přeškrtněte a nově zapište správné řešení.

2.2 Pokyny k uzavřeným úlohám

- Odpověď, kterou považujete za správnou, zřetelně zakřížkujte v příslušném bílém poli záznamového archu, a to přesně z rohu do rohu dle obrázku.



- Pokud budete chtít následně zvolit jinou odpověď, pečlivě zabarvěte původně zakřížkované pole a zvolenou odpověď vyznačte křížkem do nového pole.



- Jakýkoliv jiný způsob záznamu odpovědí a jejich oprav bude považován za nesprávnou odpověď.

TESTOVÝ SEŠIT NEOTVÍREJTE, POČKEJTE NA POKYN!

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 1

Lék ve formě sirupu se prodává ve dvou variantách – pro děti a pro dospělé.

V 1 ml sirupu pro děti jsou 3 mg účinné látky, v 1 ml sirupu pro dospělé 7,5 mg téže účinné látky.

Miloš má předepsáno užívat každé ráno 5 ml sirupu pro děti.

(*CZVV*)

1 bod

1 Vypočtěte, kolik ml sirupu pro dospělé by měl Miloš ráno užívat, aby dostával stejné množství účinné látky jako v předepsané dávce sirupu pro děti.

Řešení:

Hmotnost účinné látky v 5 ml sirupu pro děti: $5 \cdot 3\ \mathrm{mg} = 15\ \mathrm{mg}$

Objem sirupu pro dospělé (v **ml**) obsahující 15 mg účinné látky: $15 : 7{,}5 = \mathbf{2}$

---

1 bod

2 Pro $n \in \mathrm{N}$ upravte do tvaru trojčlenu:

$$\left(n \cdot \sqrt{2} + 2\right)^2 - n \cdot \sqrt{18} =$$

Řešení:

$$\left(n \cdot \sqrt{2} + 2\right)^2 - n \cdot \sqrt{18} = 2n^2 + 4 \cdot \sqrt{2} \cdot n + 4 - 3 \cdot \sqrt{2} \cdot n = \mathbf{2n^2 + \sqrt{2} \cdot n + 4}$$

---

1 bod

3 Pro všechny kladné reálné hodnoty veličin a, b, c platí:

$a : c = 3 : 10$

$b = 3a + c$

Vyjádřete co nejjednodušším způsobem veličinu b pouze v závislosti na veličině c.

Řešení:

$$a = \frac{3}{10} \cdot c$$

$$b = 3 \cdot \frac{3}{10} \cdot c + c = \frac{9}{10}c + c = \mathbf{\frac{19}{10}c}$$

max. 2 body

4 **Pro** $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1{,}5;\, 1{,}5\}$ **zjednodušte:**

$$\left(\frac{3a}{2a+3} - \frac{2a^2-3a}{4a^2-9}\right) : \frac{1}{2a+3} =$$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:

$$\left(\frac{3a}{2a+3} - \frac{2a^2-3a}{4a^2-9}\right) : \frac{1}{2a+3} = \left(\frac{3a}{2a+3} - \frac{a\cdot(2a-3)}{(2a-3)\cdot(2a+3)}\right) : \frac{1}{2a+3} =$$

$$= \left(\frac{3a}{2a+3} - \frac{a}{2a+3}\right) : \frac{1}{2a+3} = \frac{3a-a}{2a+3}\cdot\frac{2a+3}{1} = 2a$$

---

1 bod

5 Je dán výraz:

$$\frac{-45}{5y-9}$$

Určete všechna $y \in \mathbf{R}$**, pro která je daný výraz záporný.**

Řešení:

$$\frac{-45}{5y-9} < 0, \qquad -45 < 0, \qquad y \neq \frac{9}{5}$$

$$5y - 9 > 0$$

$$5y > 9$$

$$y > \frac{9}{5}, \qquad \boldsymbol{y \in \left(\frac{9}{5};+\infty\right)}$$

max. 2 body

6 V oboru R řešte:

$$\frac{2}{x} = \frac{5}{x^2 - 2x} - 1$$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:

$$\frac{2}{x} = \frac{5}{x^2 - 2x} - 1$$

$$\frac{2}{x} = \frac{5}{x \cdot (x-2)} - 1, \qquad x \in \mathbf{R} \setminus \{0; 2\}$$

$$\frac{2}{x} = \frac{5}{x \cdot (x-2)} - 1 \quad \Big| \cdot x \cdot (x-2)$$

$$2 \cdot (x-2) = 5 - x \cdot (x-2)$$

$$2x - 4 = 5 - x^2 + 2x$$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$(x-3)(x+3) = 0, \qquad \mathrm{K} = \{-3; 3\}$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 7

Ve volbě předsedy spolku vyhrál Karel. Z prvních 20 voličů jej volilo pouze 6 osob. Tedy Karlův průběžný volební výsledek po odvolení prvních 20 voličů byl 30 %.

Všichni další voliči počínaje 21. volili už jen Karla.

(CZVV)

max. 3 body

7

7.1 Vypočtěte v procentech Karlův průběžný volební výsledek po odvolení prvních 50 voličů.

Řešení:

Z prvních 50 voličů volilo Karla 36 voličů (14 jej nevolilo).

$36 : 50 = 0{,}72$

Karlův průběžný volební výsledek po odvolení 50 voličů byl 72 %.

7.2 Vypočtěte celkový počet voličů, kteří se zúčastnili volby předsedy, jestliže Karel nakonec získal 90 % hlasů.

Řešení:

Z voličů, kteří se zúčastnili volby, jich pouze 14 nevolilo Karla, což odpovídá 10 % voličů,

100 % je $10 \cdot 14$ voličů $=$ 140 voličů.

Volby předsedy se zúčastnilo celkem 140 voličů.

V záznamovém archu uveďte v obou částech úlohy celý **postup řešení**.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 8

Na světelné liště je vedle sebe umístěno 5 žárovek různých barev (Č, M, Z, Ž, F).

Signál se vydává bliknutím 2 žárovek současně, např. ZF.

Heslo je tvořeno třemi signály jdoucími po sobě v takovém pořadí, aby dva signály následující bezprostředně po sobě nebyly stejné.

Jedno heslo může být sestaveno např. ze signálů ZF, ČŽ, ZF.

(*CZVV*)

max. 2 body

8 Vypočtěte,

8.1 kolik existuje různých signálů,

Řešení:

Signálem je neuspořádaná dvojice vybraná z pěti různých prvků (žárovek).

Počet všech možností, jak vybrat 2 žárovky z pěti, je: $\binom{5}{2} = \mathbf{10}$

8.2 kolik různých hesel lze vytvořit.

Řešení:

Heslo je tvořeno třemi signály, u nichž záleží na pořadí.

Signál na první pozici může být libovolný z 10 možných.
Na druhé pozici může být libovolný z 9 signálů různých od signálu užitého na první pozici.
Na třetí pozici lze použít libovolný z 9 signálů různých od signálu na druhé pozici.

Počet všech možností, jak za daných podmínek vytvořit trojici signálů, je: $10 \cdot 9 \cdot 9 = \mathbf{810}$

---

max. 2 body

9 Pro všechny přípustné hodnoty $x \in \mathbf{R}$ je dána funkce:
$f: y = \log_9(1 - x)$

9.1 Určete definiční obor funkce f.

Řešení:

Logaritmická funkce je definována pro kladné hodnoty argumentu.

$1 - x > 0, \qquad 1 > x, \qquad \mathbf{D}_f = (-\infty; \mathbf{1})$

9.2 Určete, pro které hodnoty proměnné x platí $y = 0{,}5$.

Řešení:

$$0{,}5 = \log_9(1 - x) \Leftrightarrow 9^{0{,}5} = 1 - x$$
$$\sqrt{9} = 1 - x$$
$$3 = 1 - x$$
$$\boldsymbol{x} = \mathbf{-2}$$

1 bod

10 V oboru R řešte:

$$2^{1000} : 2^{500} + 3 \cdot 2^{500} = 2^x$$

Řešení:

$$2^{1000} : 2^{500} + 3 \cdot 2^{500} = 2^x, \qquad x \in \mathbf{R}$$
$$2^{1000-500} + 3 \cdot 2^{500} = 2^x$$
$$2^{500} + 3 \cdot 2^{500} = 2^x$$
$$4 \cdot 2^{500} = 2^x$$
$$2^2 \cdot 2^{500} = 2^x$$
$$2^{2+500} = 2^x$$
$$2^{502} = 2^x \Leftrightarrow 502 = x, \qquad \mathbf{K} = \{\mathbf{502}\}$$

VÝCHOZÍ TEXT A TABULKA K ÚLOZE 11

Všech 110 žáků čtvrtého ročníku dostalo známku ze závěrečného testu.

Tabulka udává rozdělení četností známek.

Známka	1	2	3	4	5
Četnost	30	27	27	26	0

(*CZVV*)

1 bod

11 Určete medián známek ze závěrečného testu.

Řešení:

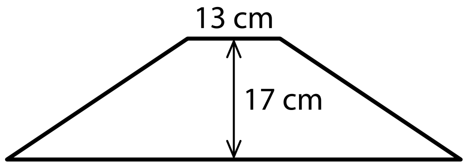
Uspořádáme všech 110 známek od nejlepší ($x_1 = 1$) po nejslabší ($x_{110} = 4$).
Počet všech známek je sudý, proto medián určíme jako aritmetický průměr prostředních dvou známek ($x_{55} = 2$, $x_{56} = 2$):

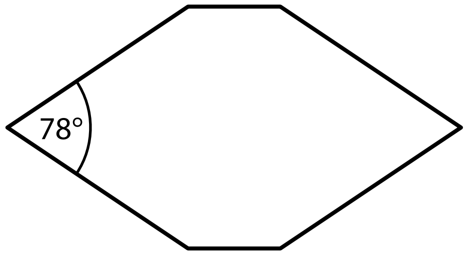
$$\mathrm{Med}(x) = \frac{x_{55} + x_{56}}{2} = \frac{2+2}{2} = \mathbf{2}$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOHÁM 12–13

Konvexní šestiúhelník se skládá ze dvou shodných rovnoramenných lichoběžníků s výškou 17 cm a kratší základnou délky 13 cm.

Právě dva vnitřní úhly v šestiúhelníku mají velikost 78°.





(*CZVV*)

1 bod

12 **Vypočtěte v cm délku delší základny lichoběžníku** a zaokrouhlete ji na celé cm.

Řešení:

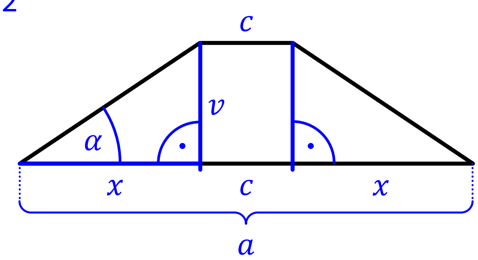
Výšku lichoběžníku označme v, délku jeho kratší základny c, délku delší základny a a velikost vnitřního úhlu lichoběžníku při delší základně označme α.

$c = 13\text{ cm}, \qquad v = 17\text{ cm}, \qquad a = 2x + c, \qquad \alpha = \dfrac{78°}{2} = 39°$

$\dfrac{v}{x} = \operatorname{tg}\alpha\,, \qquad x = \dfrac{v}{\operatorname{tg}\alpha}$

$a = 2x + c = 2 \cdot \dfrac{v}{\operatorname{tg}\alpha} + c$

$a = 2 \cdot \dfrac{17\text{ cm}}{\operatorname{tg} 39°} + 13\text{ cm} \doteq \mathbf{55\ cm}$



1 bod

13 **Vypočtěte v cm obvod šestiúhelníku** a zaokrouhlete jej na celé cm.

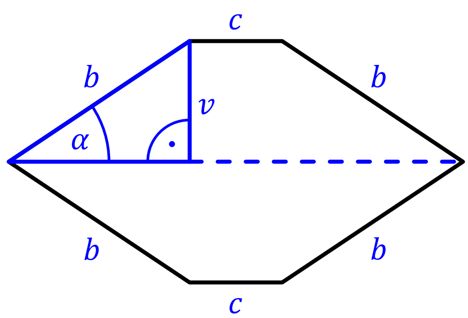
Řešení:

Délku ramene lichoběžníku označme b, obvod šestiúhelníku o.

$\dfrac{v}{b} = \sin\alpha\,, \qquad b = \dfrac{v}{\sin\alpha}$

$o = 4b + 2c = 4 \cdot \dfrac{v}{\sin\alpha} + 2c$

$o = 4 \cdot \dfrac{17\text{ cm}}{\sin 39°} + 2 \cdot 13\text{ cm} \doteq \mathbf{134\ cm}$



VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Aleš a Blanka začali současně číst knihu, která má 240 stran. Aleš četl každý den stejný počet stran. Blanka četla denně o 4 strany více než Aleš, a to včetně pátku, kdy knihu dočetla. Aleš pak pokračoval oba víkendové dny, než knihu dočetl. (CZVV)

max. 3 body

14 Užitím rovnice nebo soustavy rovnic **vypočtěte, kolik stran knihy četl denně Aleš.**

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení** (popis neznámých, sestavení rovnice, resp. soustavy rovnic, řešení a odpověď).

Řešení:

Počet stran knihy, které denně četl Aleš, označme x, přičemž $x > 0$.

	počet stran přečtených za den	počet dní četby
Aleš	x	$\frac{240}{x}$
Blanka	$x+4$	$\frac{240}{x+4}$

Blanka četla knihu o dva dny méně než Aleš:

$$\frac{240}{x} - 2 = \frac{240}{x+4} \quad \Big| \cdot x \cdot (x+4)$$

$$240 \cdot (x+4) - 2 \cdot x \cdot (x+4) = 240x$$
$$240x + 960 - 2x^2 - 8x = 240x$$
$$-2x^2 - 8x + 960 = 0$$
$$x^2 + 4x - 480 = 0$$
$$(x+24)(x-20) = 0$$
$$x = -24 \lor x = 20$$

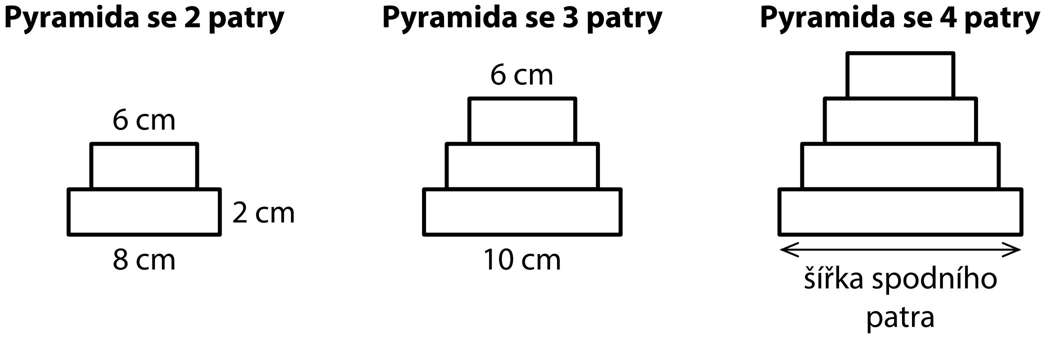
Aleš četl denně 20 stran knihy.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 15

Zobrazené pyramidy jsou rovinné obrazce složené z obdélníků, které představují jednotlivá patra pyramidy.

Každé patro je 2 cm vysoké.

Horní patro má vždy šířku 6 cm. Každé další patro je vždy o 2 cm širší než patro bezprostředně nad ním.



(*CZVV*)

max. 3 body

15 Vypočtěte

15.1 v cm šířku spodního patra pyramidy, která má 200 pater,

Řešení:

Šířky pater pyramidy (v cm) tvoří po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti.

$a_1 = 6, \quad d = 2, \quad n = 200$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d,$

$a_{200} = 6 + (200 - 1) \cdot 2 = 404$

Šířka spodního patra pyramidy, která má 200 pater, je 404 cm.

15.2 v cm^2 obsah pyramidy, která má 200 pater.

Řešení:

Obsah pyramidy získáme jako součet obsahů jednotlivých pater.
Protože mají všechna patra pyramidy výšku 2 cm, můžeme z nich vytvořit jeden obdélník, jehož jedna strana bude mít délku 2 cm. Délka druhé strany bude rovna součtu šířek všech pater pyramidy.

Součet prvních 200 členů aritmetické posloupnosti šířek pater pyramidy (v cm):

$s_{200} = \frac{200}{2} \cdot (a_1 + a_{200}), \quad a_1 = 6, \quad a_{200} = 404$

$s_{200} = \frac{200}{2} \cdot (6 + 404) = 41\,000$

Obsah pyramidy, která má 200 pater, označme S.

$S = 41\,000 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} = 82\,000 \text{ cm}^2$

Obsah pyramidy, která má 200 pater, je 82 000 cm^2.

V záznamovém archu uveďte v obou částech úlohy celý **postup řešení**.

max. 2 body

16 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (16.1–16.4), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

	A	N
16.1 Čísla $\frac{1}{20}; \frac{1}{10}; \frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{4}{5}; \frac{8}{5}$ tvoří šest po sobě jdoucích členů **geometrické** posloupnosti.	☒	☐
16.2 Čísla $1; 3; 6; 10; 15; 21$ tvoří šest po sobě jdoucích členů **aritmetické** posloupnosti.	☐	☒
16.3 Čísla $1; -2; 4; -8; 16; -32$ tvoří šest po sobě jdoucích členů **geometrické** posloupnosti.	☒	☐
16.4 Čísla $\frac{1}{20}; \frac{1}{40}; 0; -\frac{1}{40}; -\frac{1}{20}; -\frac{3}{40}$ tvoří šest po sobě jdoucích členů **aritmetické** posloupnosti.	☒	☐

Řešení:

16.1 Každé následující číslo je dvojnásobkem předchozího čísla, resp. podíl každých dvou po sobě jdoucích čísel je roven 2:

$$\frac{1}{10} = 2 \cdot \frac{1}{20}, \qquad \frac{1}{5} = 2 \cdot \frac{1}{10}, \qquad \frac{2}{5} = 2 \cdot \frac{1}{5}, \qquad \frac{4}{5} = 2 \cdot \frac{2}{5}, \qquad \frac{8}{5} = 2 \cdot \frac{4}{5}$$

Čísla **tvoří** po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti ($q = 2$).

16.2 Rozdíl každých dvou po sobě jdoucích čísel není konstantní,
např. $3 - 1 = 2, \qquad 6 - 3 \neq 2$.

Čísla **netvoří** po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti.

16.3 Podíl každých dvou po sobě jdoucích čísel v šestici je konstantní:

$$\frac{-2}{1} = \frac{4}{-2} = \frac{-8}{4} = \frac{16}{-8} = \frac{-32}{16} = -2$$

Čísla **tvoří** po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti ($q = -2$).

16.4 Rozdíl každých dvou po sobě jdoucích čísel je konstantní:

$$\frac{1}{40} - \frac{1}{20} = -\frac{1}{40}, \qquad 0 - \frac{1}{40} = -\frac{1}{40},$$

$$-\frac{1}{40} - 0 = -\frac{1}{40}, \qquad -\frac{1}{20} - \left(-\frac{1}{40}\right) = -\frac{1}{40},$$

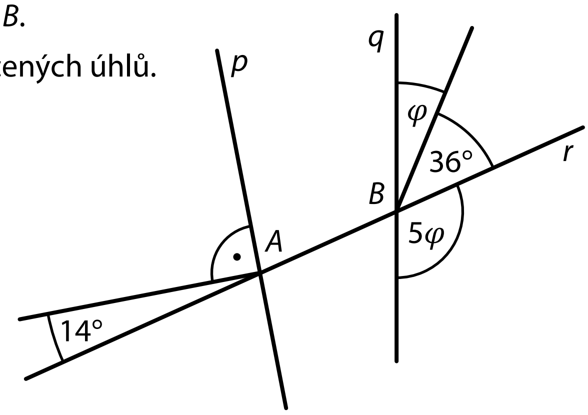
$$-\frac{3}{40} - \left(-\frac{1}{20}\right) = -\frac{1}{40}$$

Čísla **tvoří** po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti $\left(d = -\frac{1}{40}\right)$.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 17

Přímky *p* a *q* protínají přímku *r* v bodech *A*, *B*.

V těchto bodech jsou vrcholy všech vyznačených úhlů.



(*CZVV*)

2 body

17 Jaká je odchylka přímek *p*, *q*?

Velikosti úhlů neměřte, ale vypočtěte.

A) 12°

B) 13°

C) 14°

D) 16°

E) jiná odchylka

Řešení:

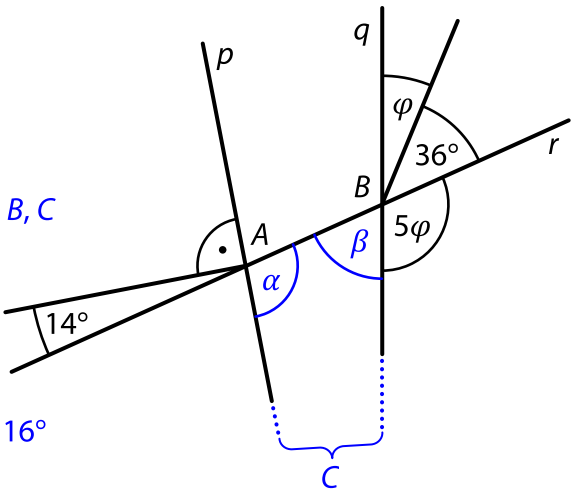
$6\varphi + 36° = 180°, \qquad \varphi = 24°$

Průsečík přímek *p*, *q* označme *C*.
Vnitřní úhly v trojúhelníku *ABC* při vrcholech *A*, *B*, *C* mají po řadě velikosti α, β, γ.
Odchylka přímek *p*, *q* je γ.

$\alpha = 90° + 14° = 104°$

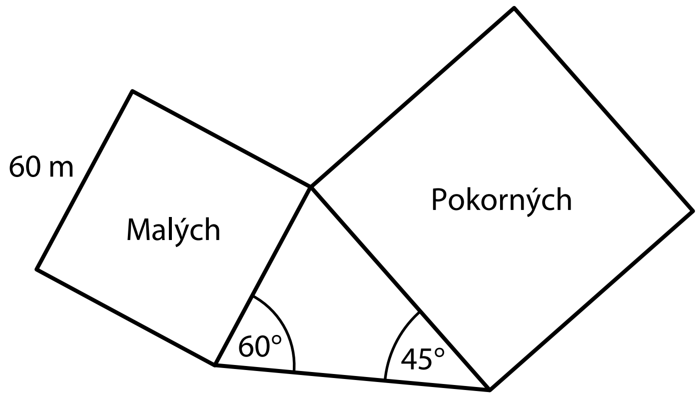
$\beta = \varphi + 36° = 24° + 36° = 60°$

$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - (104° + 60°) = 16°$



VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 18

Na trojúhelníkový pozemek navazují čtvercové pozemky Malých a Pokorných.



(*CZVV*)

2 body

18 O kolik m^2 je výměra pozemku Malých menší než výměra pozemku Pokorných?

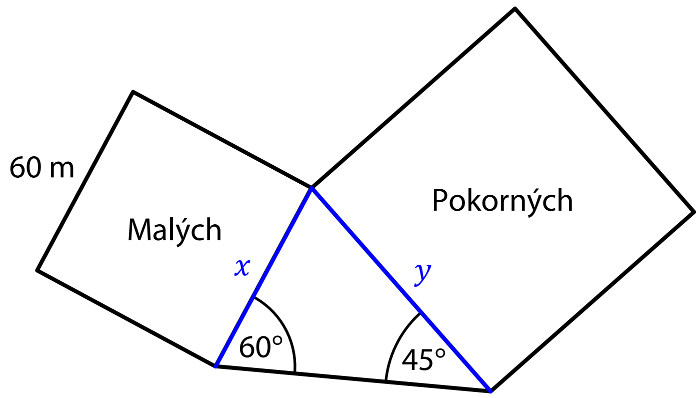
A) o 1 200 m^2

B) o 1 400 m^2

C) o 1 800 m^2

D) o 2 100 m^2

E) o 2 700 m^2



Řešení:

Délku strany čtvercového pozemku Malých označme x a Pokorných y.

Platí:

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin 60°}{\sin 45°} \Rightarrow y = x \cdot \frac{\sin 60°}{\sin 45°} = x \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot x, \qquad x = 60\text{ m}$$

Výměra pozemku Malých: x^2

Výměra pozemku Pokorných: $y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot x\right)^2 = \frac{3}{2}x^2$

Rozdíl výměr obou pozemků: $y^2 - x^2 = \frac{3}{2}x^2 - x^2 = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2} \cdot 60^2\text{ m}^2 = 1\,800\text{ m}^2$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 19

Délky hran kvádru mají tvořit tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Délky dvou hran kvádru jsou 5 cm a 8 cm.

(CZVV)

2 body

19 Jaký je nejmenší možný objem kvádru?

A) menší než 80 cm^3

B) 80 cm^3

C) 100 cm^3

D) 125 cm^3

E) větší než 125 cm^3

Řešení:

Délky hran kvádru označme a, b, c a objem kvádru označme V.

Aby byl objem kvádru co nejmenší, chybějící délka hrany musí být nejmenší možná, tedy
$a < b < c, \qquad b = 5\text{ cm}, \qquad c = 8\text{ cm}$

Jsou-li délky hran a, b, c tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti (s kvocientem q), platí:

$$q = \frac{c}{b} = \frac{8}{5}, \qquad a = \frac{b}{q} = \frac{5\text{ cm}}{\frac{8}{5}} = \frac{25}{8}\text{ cm}$$

$$V = abc = \frac{25}{8}\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} \cdot 8\text{ cm} = 125\text{ cm}^3$$

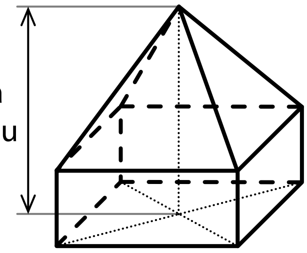
případně

Pro tři po sobě jdoucí členy a, b, c geometrické posloupnosti platí: $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}, \qquad a = \frac{b^2}{c}$

$$V = abc = \frac{b^2}{c} \cdot bc = b^3 = 125\text{ cm}^3$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 20

Model domku se skládá z kvádru a jehlanu.
Obě tělesa mají stejnou čtvercovou podstavu.
Výška jehlanu je 6 dm.
Objem kvádru je polovinou objemu celého modelu.



(*CZVV*)

2 body

20 Jaká je výška modelu?

A) 7,5 dm

B) 8 dm

C) 9 dm

D) 10,5 dm

E) 12 dm

Řešení:

Výška jehlanu označme v_j, výšku kvádru v_k a výšku celého modelu v.
Obsah čtvercové podstavy označme S_p, objem jehlanu V_j a objem kvádru V_k.

$V_j = \frac{1}{3} S_p v_j, \qquad V_k = S_p v_k$

Objem kvádru a objem jehlanu musí být stejný:

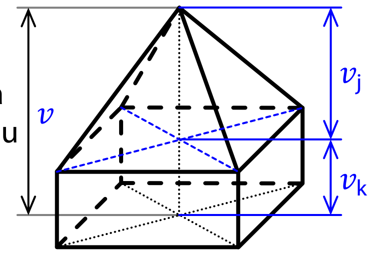
$S_p v_k = \frac{1}{3} S_p v_j$

Proto je výška kvádru třetinou výšky jehlanu:

$v_k = \frac{1}{3} v_j$

Pro $v_j = 6$ dm je $v_k = 2$ dm a výška celého modelu:

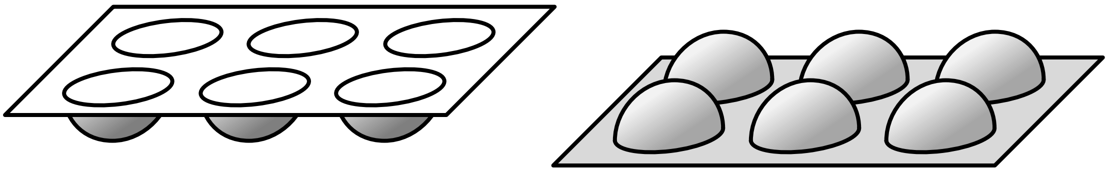
$v = v_j + v_k = 6 \text{ dm} + 2 \text{ dm} = 8 \text{ dm}$



VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 21

Plechová pečicí forma má při pohledu shora tvar obdélníku o rozměrech 20 cm a 29 cm. Forma má šest shodných dutin (resp. vypouklin) tvaru polokoule, každou o poloměru 3,5 cm. Plochy pečicí formy jsou z jedné strany světlé a z opačné strany tmavé.

Tloušťku plechu zanedbáváme.



(*CZVV*)

2 body

21 Jaký je celkový obsah tmavých ploch pečicí formy?

Výsledek je zaokrouhlen na celé cm^2.

A) 811 cm^2

B) 888 cm^2

C) 910 cm^2

D) 1 042 cm^2

E) 1 273 cm^2

Řešení:

Rozměry formy označme a, b a poloměr polokoulí tvořících vypoukliny označme r.
Obsah tmavých ploch formy označme S.

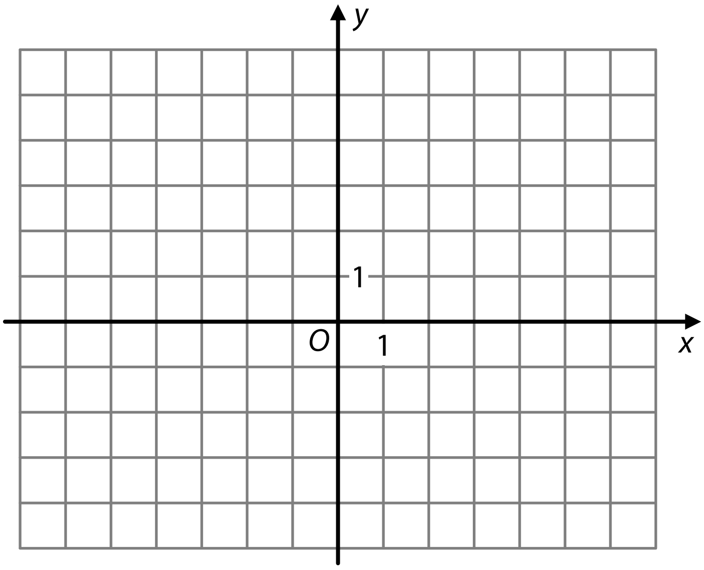
Na rovné ploše pečicí formy je 6 kruhových otvorů o poloměru r nahrazeno šesti kulovými vrchlíky tvaru polokoule. Obsah těchto 6 kulových vrchlíků je stejný jako povrch 3 koulí o poloměru r.

$S = ab - 6 \cdot \pi r^2 + 3 \cdot 4\pi r^2 = ab + 6\pi r^2$, $\quad a = 20$ cm, $\quad b = 29$ cm, $\quad r = 3{,}5$ cm

$S = \left(20 \cdot 29 + 6\pi \cdot 3{,}5^2\right)$ cm$^2 \doteq 811$ cm^2

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 22

Bod $S[2; 0]$ je střed úsečky AB, pro kterou platí:
$A[-1; y]$, $B[x; 4]$



(CZVV)

2 body

22 Jaká je délka úsečky *AB*?

A) 8

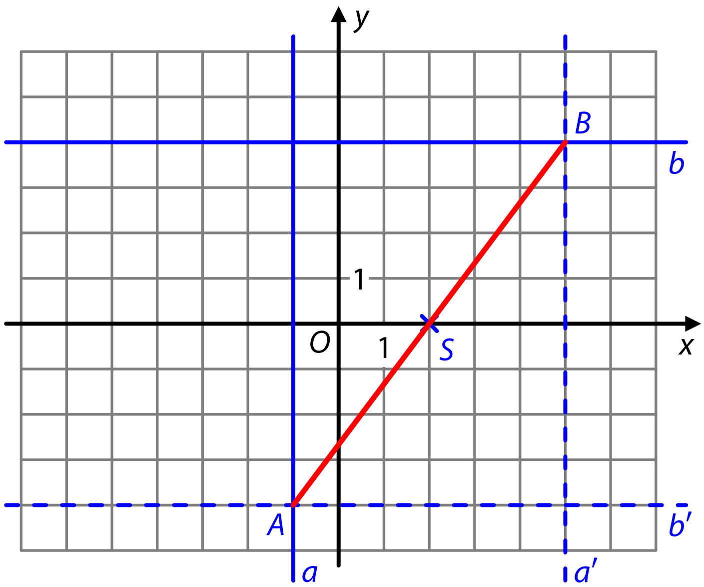
B) $6 \cdot \sqrt{2}$

C) 10

D) $8 \cdot \sqrt{2}$

E) 12

Grafické řešení:



Bod S je střed souměrnosti úsečky AB.

Bod A leží na přímce a: $x = -1$, bod B na přímce b: $y = 4$.

Bod A leží rovněž na přímce b', bod B na přímce a'. (Přímky a', b' jsou obrazy přímek a, b ve středové souměrnosti se středem S.)

Sestrojíme body $A[-1; -4]$, $B[5; 4]$.

$|AB| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

Početní řešení:

Souřadnice středu úsečky *AB* jsou aritmetickým průměrem souřadnic bodů *A*, *B*.

$$\left[\frac{-1+x}{2};\frac{y+4}{2}\right] = [2;0], \qquad \frac{-1+x}{2} = 2 \wedge \frac{y+4}{2} = 0$$

$$-1+x = 4 \wedge y+4 = 0$$

$$x = 5 \wedge y = -4$$

$A[-1;-4]$, $B[5;4]$, $\quad |AB| = \sqrt{(-1-5)^2+(-4-4)^2} = \sqrt{36+64} = 10$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 23

Při premiéře dostal každý z návštěvníků kina 1 kus CD. Proto bylo pro návštěvníky připraveno několik beden, z nichž každá obsahovala právě n kusů CD.

Návštěvníci byli usazeni buď v přízemí, nebo na balkoně. Obsah jedné bedny stačil buď přesně pro 8 % návštěvníků v přízemí, nebo přesně pro $\frac{5}{8}$ návštěvníků na balkoně.

Když byli obdarováni všichni návštěvníci, všechny bedny vyjma poslední byly prázdné.

(*CZVV*)

2 body

23 Kolik procent CD z původního počtu n kusů zbylo v poslední bedně?

A) méně než 50 %

B) 65 %

C) 75 %

D) 85 %

E) více než 85 %

Řešení:

8 % návštěvníků v přízemí ... n kusů CD

100 % návštěvníků v přízemí ... $\frac{100}{8} \cdot n = 12{,}5n$ kusů CD

$\frac{5}{8}$ návštěvníků na balkoně ... n kusů CD

$\frac{8}{8}$ návštěvníků na balkoně ... $\frac{\frac{8}{8}}{\frac{5}{8}} \cdot n = 1{,}6n$ kusů CD

Počet všech CD, jimiž byli obdarováni návštěvníci kina v přízemí i na balkoně:
$12{,}5n + 1{,}6n = 14{,}1n$

V každé bedně bylo n kusů CD, tedy z poslední (patnácté) bedny bylo odebráno $0{,}1n$ kusů CD a zbylo v ní $0{,}9n$ kusů CD, což je 90 % původního počtu n kusů.

2 body

24

$$\frac{y}{x^3 + 2x} = \frac{1}{x^2 + 2}$$

Uvedená rovnost výrazů platí

A) pro všechna reálná čísla x a y.

B) pro libovolné reálné číslo y a každé nenulové reálné číslo x.

C) jen pro $y = x$, přičemž x je libovolné reálné číslo.

D) jen pro $y = x$, přičemž x je libovolné nenulové reálné číslo.

E) pro všechna reálná čísla x a y, kde $x \neq 0$ a současně $x \neq y$.

Řešení:

$$\frac{y}{x^3 + 2x} = \frac{1}{x^2 + 2}$$

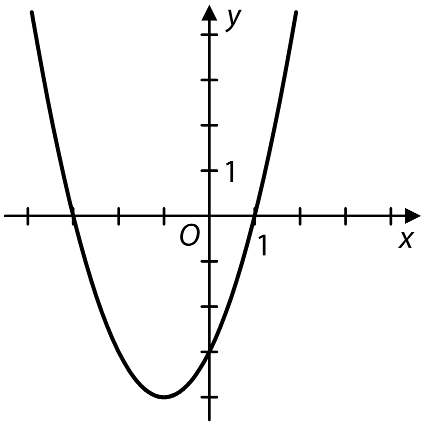
$$\frac{y}{x(x^2 + 2)} = \frac{1}{x^2 + 2}$$

$$\frac{y}{x} \cdot \frac{1}{x^2 + 2} = \frac{1}{x^2 + 2}$$

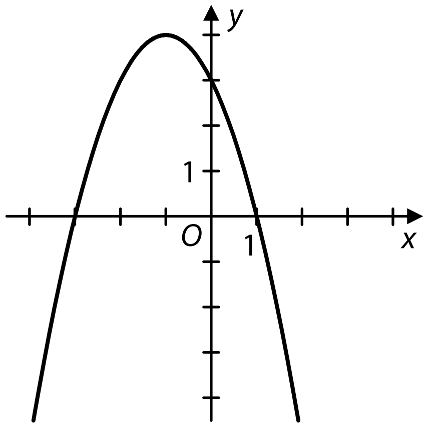
Rovnost platí pouze pro $\frac{y}{x} = 1$, což nastane právě když $y = x \wedge x \neq 0$.

25 Každému z grafů (25.1–25.4) kvadratické funkce přiřaďte odpovídající předpis (A–F).

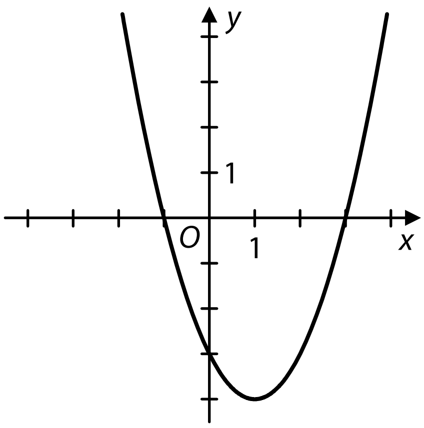
25.1



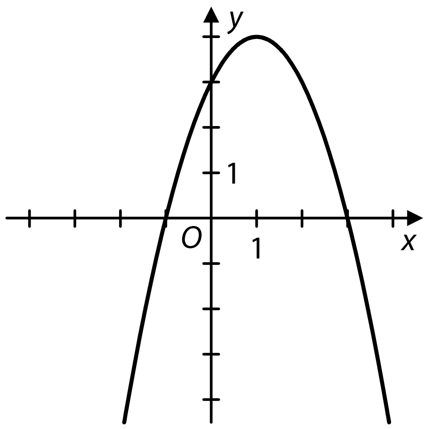
25.2



25.3



25.4



25.1 ___E___

25.2 ___F___

25.3 ___A___

25.4 ___C___

A) $y = (x - 3)(x + 1)$

B) $y = (x - 3)(x - 1)$

C) $y = (3 - x)(x + 1)$

D) $y = (x + 3)(x + 1)$

E) $y = (x + 3)(x - 1)$

F) $y = (x + 3)(1 - x)$

Řešení:

Předpis kvadratické funkce lze sestavit pomocí průsečíků grafu funkce se souřadnicovými osami. Postup ukážeme na úloze 25.1.

25.1 $f(-3) = f(1) = 0,$ $\quad f(0) = -3$

$f: y = a(x+3)(x-1),$ $\quad -3 = a(0+3)(0-1) = -3a,$ $\quad a = 1$

$f: y = (x+3)(x-1)$

Všechny paraboly v grafech jsou shodné, proto v úlohách 25.1, 25.3 platí $a = 1$ a v úlohách 25.2, 25.4 platí $a = -1$.

25.2 $f(-3) = f(1) = 0$

$f: y = -1 \cdot (x+3)(x-1) = (x+3)(1-x)$

25.3 $f(-1) = f(3) = 0$

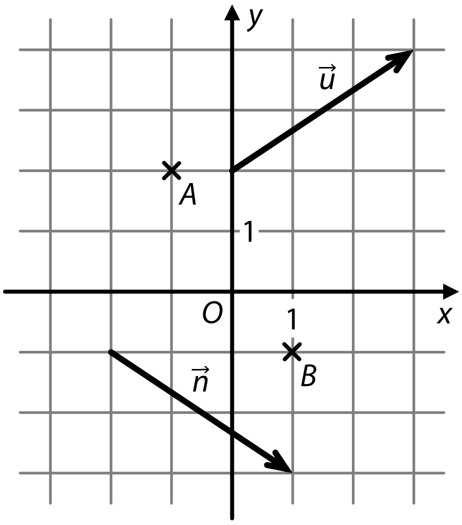
$f: y = 1 \cdot (x+1)(x-3) = (x-3)(x+1)$

25.4 $f(-1) = f(3) = 0$

$f: y = -1 \cdot (x+1)(x-3) = (3-x)(x+1)$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 26

V mřížových bodech čtvercové sítě leží body A, B a počáteční i koncové body orientovaných úseček, které představují umístění vektorů $\vec{u}$, $\vec{n}$.



(CZVV)

max. 3 body

26 Přiřaďte ke každé přímce (26.1–26.3) její obecnou rovnici (A–E).

26.1 přímka p určená bodem A a normálovým vektorem $\vec{n}$ ___A___

26.2 přímka q určená bodem A a směrovým vektorem $\vec{u}$ ___E___

26.3 přímka r procházející body A, B ___B___

A) $3x - 2y + 7 = 0$

B) $3x + 2y - 1 = 0$

C) $2x + 3y - 4 = 0$

D) $2x - 3y - 5 = 0$

E) $2x - 3y + 8 = 0$

Řešení:

Z obrázku získáme souřadnice bodů a vektorů: $A[-1; 2], B[1; -1], \vec{n} = (3; -2), \vec{u} = (3; 2)$

26.1 přímka p má normálový vektor $\vec{n} = (3; -2)$:
$p: 3x - 2y + c = 0$
$A \in p: 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 + c = 0, \qquad c = 7$
$p: 3x - 2y + 7 = 0$

26.1 přímka q má směrový vektor $\vec{u} = (3; 2)$, tedy normálový vektor je $\vec{n}_q = (2; -3)$:
$q: 2x - 3y + c = 0$
$A \in q: 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 + c = 0, \qquad c = 8$
$q: 2x - 3y + 8 = 0$

26.1 směrový vektor přímky r je $B - A = (2; -3)$, tedy normálový vektor je $\vec{n}_r = (3; 2)$:
$r: 3x + 2y + c = 0$
$A \in r: 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + c = 0, \qquad c = -1$
$r: 3x + 2y - 1 = 0$

ZKONTROLUJTE, ZDA JSTE DO ZÁZNAMOVÉHO ARCHU UVEDL/A VŠECHNY ODPOVĚDI.