cermat

MATEMATIKA

MAMZD20C0T04

DIDAKTICKÝ TEST

Maximální bodové hodnocení: 50 bodů
Hranice úspěšnosti: 33 %

1 Základní informace k zadání zkoušky

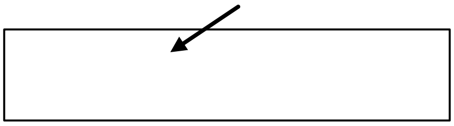
- **Didaktický test** obsahuje **26 úloh**.
- **Časový limit** pro řešení didaktického testu je **uveden na záznamovém archu**.
- **Povolené pomůcky:** psací a rýsovací potřeby, Matematické, fyzikální a chemické tabulky a kalkulátor bez grafického režimu, bez řešení rovnic a úprav algebraických výrazů. Nelze použít programovatelný kalkulátor.
- U každé úlohy je uveden maximální počet bodů.
- Odpovědi pište do záznamového archu.
- Poznámky si můžete dělat do testového sešitu, nebudou však předmětem hodnocení.
- **Nejednoznačný nebo nečitelný zápis odpovědi bude považován za chybné řešení.**
- První část didaktického testu (úlohy 1–15) tvoří **úlohy otevřené**.
- Ve druhé části didaktického testu (úlohy 16–26) jsou uzavřené úlohy, které obsahují nabídku odpovědí. U každé úlohy nebo podúlohy je **právě jedna odpověď správná**.
- Za neuvedené řešení či za nesprávné řešení úlohy jako celku **se neudělují záporné body**.

2 Pravidla správného zápisu odpovědí

- Odpovědi zaznamenávejte **modře nebo černě** píšící propisovací tužkou, která píše **dostatečně silně a nepřerušovaně**.
- Budete-li rýsovat obyčejnou tužkou, následně obtáhněte čáry propisovací tužkou.
- Hodnoceny budou **pouze odpovědi uvedené v záznamovém archu**.

2.1 Pokyny k otevřeným úlohám

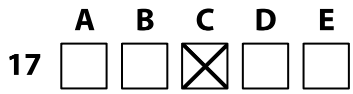
- Výsledky **pište čitelně** do vyznačených bílých polí.

1 

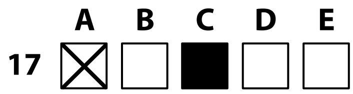
- Je-li požadován celý postup řešení, uveďte jej do záznamového archu. Pokud uvedete pouze výsledek, nebudou vám přiděleny žádné body.
- **Zápisy uvedené mimo** vyznačená bílá pole **nebudou hodnoceny**.
- Chybný zápis přeškrtněte a nově zapište správné řešení.

2.2 Pokyny k uzavřeným úlohám

- Odpověď, kterou považujete za správnou, zřetelně zakřížkujte v příslušném bílém poli záznamového archu, a to přesně z rohu do rohu dle obrázku.



- Pokud budete chtít následně zvolit jinou odpověď, pečlivě zabarvěte původně zakřížkované pole a zvolenou odpověď vyznačte křížkem do nového pole.



- Jakýkoliv jiný způsob záznamu odpovědí a jejich oprav bude považován za nesprávnou odpověď.

TESTOVÝ SEŠIT NEOTVÍREJTE, POČKEJTE NA POKYN!

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 1

Ve třídě je 32 žáků, 13 z nich hraje na kytaru, 15 na flétnu a 10 žáků nehraje na žádný z těchto dvou nástrojů.

(CZVV)

1 bod

1 Vypočtěte, kolik žáků třídy hraje na kytaru i na flétnu.

Řešení:

Alespoň na jeden z uvedených dvou nástrojů hraje 22 žáků ($32 - 10 = 22$).
Na kytaru i na flétnu hraje **6 žáků** ($13 + 15 - 22 = \mathbf{6}$).

---

1 bod

2 Pro $y \in (0; +\infty)$ zjednodušte:

$$\sqrt{\frac{y^{64}}{16} \cdot \left(\frac{2}{y^7}\right)^4} =$$

Řešení:

$$\sqrt{\frac{y^{64}}{16} \cdot \left(\frac{2}{y^7}\right)^4} = \frac{y^{32}}{4} \cdot \left(\frac{2}{y^7}\right)^2 = \frac{y^{32}}{4} \cdot \frac{4}{y^{14}} = \boldsymbol{y^{18}}$$

---

1 bod

3 Určete všechny hodnoty $c \in \mathbf{R}$, pro které má smysl výraz:

$$\frac{\sqrt{1-c}}{\sqrt{5-c}}$$

Řešení:

$1 - c \geq 0 \land 5 - c > 0$
$c \leq 1 \land c < 5$

$\boldsymbol{c \in (-\infty; 1\rangle}$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 4

Paní Veselá si chtěla pořídit auto. Za nové by utratila 75 % svých úspor. Kdyby si pořídila rok staré auto, 43 % úspor by jí zbylo.

(CZVV)

1 bod

4 Vypočtěte, o kolik procent je rok staré auto levnější než nové.

Řešení:

Hodnotu úspor paní Veselé označme u.

Cena nového auta	$0{,}75u$ ... 100 %	
Cena rok starého auta	$u - 0{,}43u = 0{,}57u$ ... 76 %	$\left(\frac{0{,}57u}{0{,}75u} \cdot 100\,\% = 76\,\%\right)$
Rozdíl v cenách	$0{,}18u$ ... **24 %**	(100 % − 76 % = **24 %**)

Rok staré auto je **o 24 %** levnější než nové.

max. 2 body

5 **Pro $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1; 0\}$ zjednodušte**
(výsledný výraz nesmí obsahovat závorky)**:**

$$\frac{a+1}{\frac{a+1}{a}-1} : \frac{a}{a+1} - 1 =$$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:

$$\frac{a+1}{\frac{a+1}{a}-1} : \frac{a}{a+1} - 1 = \frac{a+1}{\frac{a+1-a}{a}} \cdot \frac{a+1}{a} - 1 = \frac{(a+1)(a+1)}{\frac{1}{a} \cdot a} - 1 =$$

$$\frac{a^2+2a+1}{1} - 1 = a^2 + 2a$$

---

max. 2 body

6 **V oboru R řešte:**

$$\frac{x-6}{x-3} = 2 - \frac{x}{x+3}$$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:

$$\frac{x-6}{x-3} = 2 - \frac{x}{x+3} \quad \Big| \cdot (x-3)(x+3), \qquad x \in \mathbf{R} \setminus \{-3; 3\}$$

$$(x-6)(x+3) = 2 \cdot (x-3)(x+3) - x \cdot (x-3)$$

$$x^2 - 6x + 3x - 18 = 2 \cdot (x^2 - 9) - x^2 + 3x$$

$$2x^2 - 6x - 18 = 2x^2 - 18$$

$$-6x = 0$$

$$x = 0, \qquad \mathrm{K} = \{0\}$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 7

Hodinová sazba trenéra badmintonu je o 250 korun vyšší než hodinový pronájem kurtu.

Cena za dvě hodiny pronájmu kurtu je o jednu devítinu nižší, než je hodinová sazba trenéra badmintonu.

(Hodinová sazba trenéra badmintonu nezahrnuje pronájem kurtu.)

(CZVV)

max. 2 body

7 Vypočtěte v korunách hodinovou sazbu trenéra badmintonu.

Řešení:

Hodinovou sazbu trenéra badmintonu (v korunách) označme t,
cenu za hodinu pronájmu kurtu (v korunách) označme k.

$$k = t - 250$$
$$2k = \frac{8}{9}t$$

$$2(t - 250) = \frac{8}{9}t$$
$$\frac{10}{9}t = 500$$
$$t = \mathbf{450}$$

Hodinová sazba trenéra badmintonu je **450 korun**.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 8

V lichoběžníku je délka jedné základny 4 cm. Výška lichoběžníku je stejná jako délka druhé základny a obsah lichoběžníku je 96 cm^2.

(CZVV)

max. 2 body

8 Vypočtěte v cm výšku lichoběžníku.

Řešení:

Délky základen lichoběžníku (v cm) označme a, c a výšku v.
Obsah lichoběžníku (v cm^2) označme S.

V lichoběžníku platí: $a = 4$, $c = v$, $S = 96$

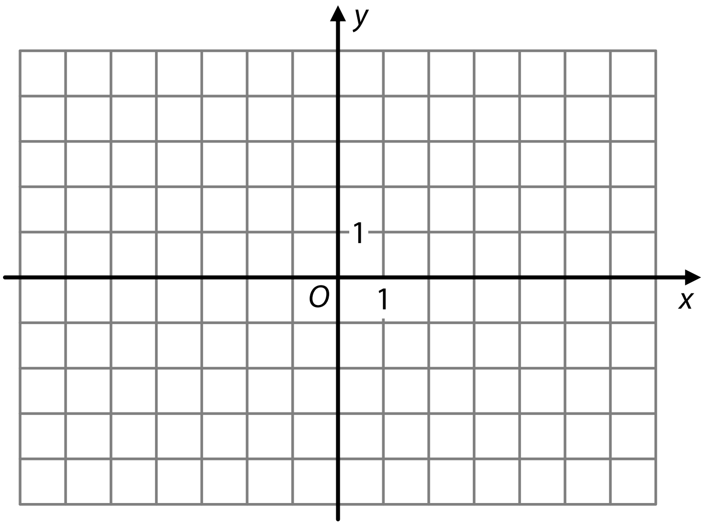
$$S = \frac{(a + c) \cdot v}{2}$$
$$96 = \frac{(4 + v) \cdot v}{2}$$
$$192 = 4v + v^2$$
$$0 = v^2 + 4v - 192$$
$$0 = (v - 12)(v + 16)$$
$$v = \mathbf{12} \lor v = -16$$

Výška lichoběžníku měří **12 cm**.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 9

Je dána přímka p: $y = 0{,}5x + 1$.

Přímka q je kolmá k přímce p a prochází bodem $Q[-2; 4]$.



(CZVV)

max. 2 body

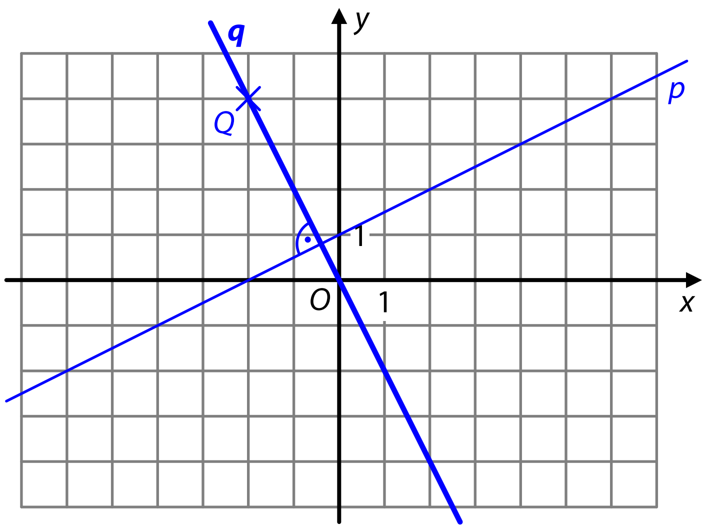
9

9.1 V kartézské soustavě souřadnic Oxy sestrojte přímku q.

V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

Řešení:

V kartézské soustavě souřadnic zakreslíme přímku p a bod Q.
Bodem Q vedeme přímku q kolmou k přímce p.



případně

Sestavíme rovnici přímky q (např. směrnicový tvar) a zakreslíme ji do kartézské soustavy souřadnic.

Směrnice přímky p je $k_p = 0{,}5$.

Pro směrnici přímky q platí:

$$k_q = -\frac{1}{k_p} = -2$$

Směrnicový tvar rovnice přímky q:

$$q\colon y = -2x + q$$

$$Q \in q\colon 4 = -2 \cdot (-2) + q, \quad q = 0$$

$$q\colon y = -2x$$

9.2 Vypočtěte souřadnice průsečíku $M[m_1; m_2]$ přímek p, q.

Řešení:

Sestavíme rovnici přímky q (viz početní řešení úlohy 9.1): $q\colon y = -2x$

$M[m_1; m_2] \in p \cap q$: $m_2 = 0{,}5m_1 + 1$

$$\underline{m_2 = -2m_1}$$

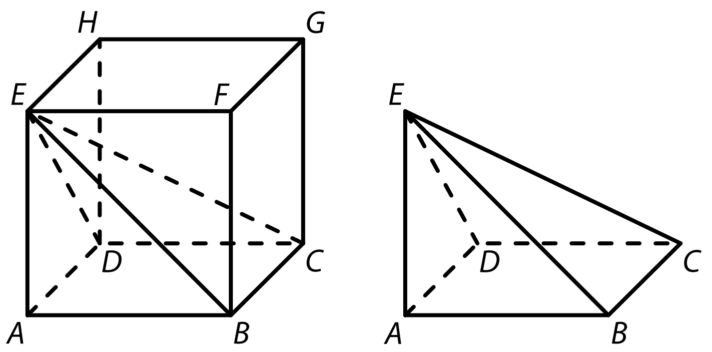
$$0 = 2{,}5m_1 + 1$$

$$m_1 = -\frac{2}{5}, \qquad m_2 = \frac{4}{5}$$

$\boldsymbol{M\left[-\frac{2}{5}; \frac{4}{5}\right]}$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 10

V krychli *ABCDEFGH* je umístěn čtyřboký jehlan *ABCDE*, který má objem 243 cm^3.



(CZVV)

1 bod

10 Vypočtěte v cm^2 obsah podstavy *ABCD*.

Řešení:

Délku hrany krychle označme a, obsah podstavy *ABCD* označme S_p a objem jehlanu V.
Výška jehlanu je rovna délce a hrany krychle.

$$S_\mathrm{p} = a^2, \qquad V = \frac{1}{3} \cdot S_\mathrm{p} \cdot a = \frac{a^3}{3}$$

Objem krychle je tedy trojnásobkem objemu jehlanu.

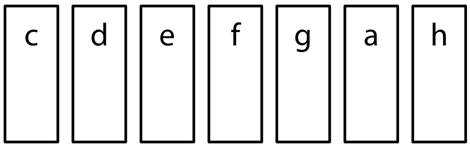
$$a^3 = 3V$$

$$a = \sqrt[3]{3V} = \sqrt[3]{3 \cdot 243\ \mathrm{cm}^3} = 9\ \mathrm{cm}$$

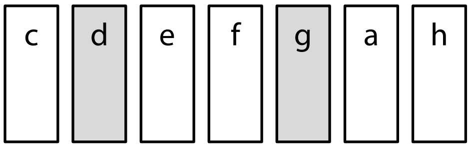
$S_\mathrm{p} = (9\ \mathrm{cm})^2 = \mathbf{81\ cm^2}$

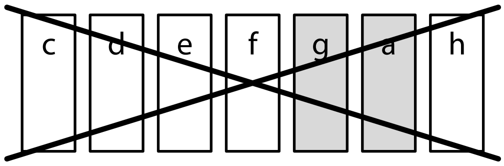
VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 11

Hugo ponechal na dětském xylofonu 7 destiček s tóny c, d, e, f, g, a, h.



Do telefonu si pak nahrál všechny dvojzvuky vytvořené současným klepnutím dvěma paličkami na dvě různé destičky, které spolu bezprostředně **nesousedí**.
(Nahrál si např. dvojzvuky d-g, e-a, g-h.)





(*CZVV*)

1 bod

11 Vypočtěte, kolik různých dvojzvuků si Hugo nahrál do telefonu.

Řešení:

Dvojzvuk je neuspořádanou dvojicí vybranou ze sedmi různých prvků (destiček).

Počet všech možností, jak vybrat 2 destičky ze sedmi, je: $\binom{7}{2} = 21$

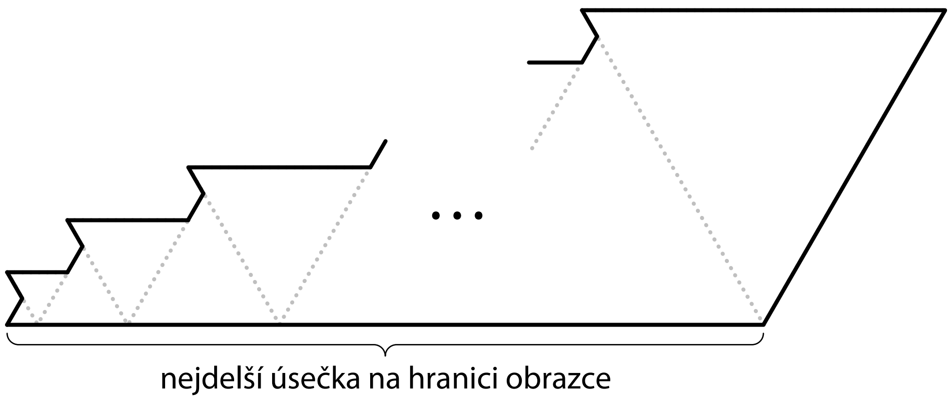
Mezi sedmi destičkami je 6 dvojic bezprostředně sousedících destiček (c-d, d-e, …, a-h).

Hugo si do telefonu nahrál **15 dvojzvuků** ($21 - 6 =$ **15**).

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 12

Zakreslený obrazec se skládá z 50 rovnostranných trojúhelníků.

První z těchto trojúhelníků má stranu délky 1 cm.
Každý další trojúhelník má stranu o 1 cm delší než předchozí trojúhelník.



Nejdelší úsečka na hranici obrazce se skládá z vodorovných stran všech trojúhelníků s lichým pořadím (1., 3., 5. atd.). Každý trojúhelník se sudým pořadím má na této úsečce jeden vrchol.

(*CZVV*)

max. 2 body

12 Vypočtěte v cm

12.1 délku nejdelší úsečky na hranici obrazce,

Řešení:

Délka nejdelší úsečky na hranici obrazce je rovna součtu délek stran 25 trojúhelníků s lichým pořadím, tj. 1 cm + 3 cm + 5 cm + ⋯ + 49 cm.

Sečteme prvních 25 členů aritmetické posloupnosti:

$n = 25, \qquad a_1 = 1, \qquad a_{25} = 49$

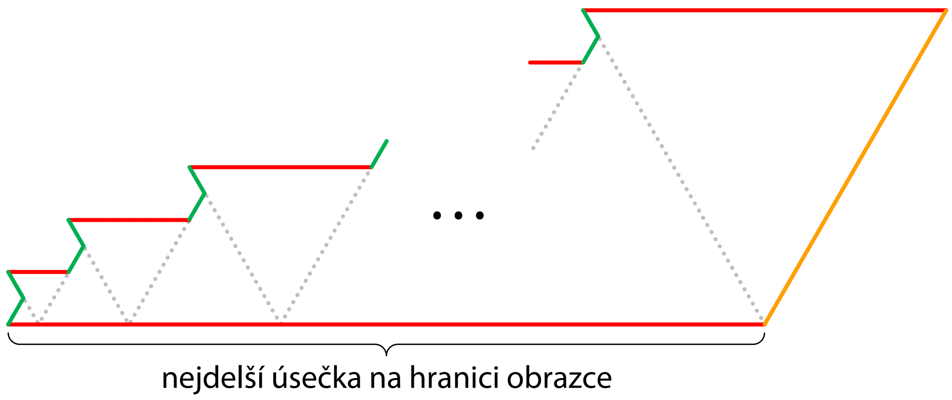
$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

$$s_{25} = \frac{25}{2} \cdot (1 + 49) = \mathbf{625}$$

Délka nejdelší úsečky na hranici obrazce je **625 cm**.

12.2 obvod obrazce.

Řešení:



Celou hranici obrazce obarvíme. Vyznačíme touž barvou:

1. po jedné straně každého z 50 rovnostranných trojúhelníků, z nichž je obrazec složen,
2. 50 úseček délky 1 cm,
3. jednu úsečku délky 50 cm.

Obvod obrazce (v cm): $\frac{50}{2} \cdot (1 + 50) + 50 \cdot 1 + 50 = \mathbf{1\,375}$

Obvod obrazce je **1 375 cm**.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 13

V Kocourkově si klient založil účet a vložil na něj 2 000 zlaťáků. Po uplynutí každého roku se aktuální částka na jeho účtu mávnutím proutku zvětší o polovinu.

Klient na účet žádné další peníze nevkládá, ani je z účtu nevybírá.

(CZVV)

max. 2 body

13 Vypočtěte,

13.1 kolik zlaťáků bude mít klient na účtu po dvou letech od jeho založení,

13.2 po kolika letech od založení účtu bude mít klient poprvé na účtu přes 1 milion zlaťáků.

Řešení:

Mávnutím proutku probíhá složené úročení; úrokovou míru označme i.
Počáteční vklad (ve zlaťácích) označme K_0, jistinu po uplynutí n let (po připsání úroků) K_n.

$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n, \qquad K_0 = 2\,000, \qquad i = 0{,}5$

13.1 $K_2 = K_0 \cdot (1 + i)^2 = 2\,000 \cdot 1{,}5^2 = \mathbf{4\,500}$

Po dvou letech bude mít klient na účtu **4 500 zlaťáků**.

13.2 Vypočteme, pro jaké n bychom dosáhli $K_n = 1\,000\,000$. Počet let potřebných k dosažení této částky na účtu je nejbližší celé číslo vyšší než vypočtené n.

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$$
$$1\,000\,000 = 2\,000 \cdot 1{,}5^n$$
$$500 = 1{,}5^n \Leftrightarrow n = \log_{1{,}5} 500 \doteq 15{,}3$$

Částka na účtu přesáhne 1 milion zlaťáků poprvé **po 16 letech**.

VÝCHOZÍ TEXT A TABULKA K ÚLOZE 14

V tabulce s odměnami všech 12 pracovníků firmy chybí nejvyšší odměna.

Aritmetický průměr odměn všech pracovníků je o 20 % větší než medián těchto odměn.

Odměna v korunách	15 000	20 000	25 000	30 000	
Četnost	4	3	2	2	1

(*CZVV*)

max. 3 body

14 Vypočtěte v korunách

14.1 aritmetický průměr odměn všech pracovníků firmy,

Řešení:

Odměny všech 12 pracovníků (v korunách) označme od nejnižší po nejvyšší $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$.

$$\mathrm{Med}(x) = \frac{x_6 + x_7}{2} = \frac{20\,000 + 20\,000}{2} = 20\,000$$

$$\bar{x} = 1{,}2 \cdot \mathrm{Med}(x) = 1{,}2 \cdot 20\,000 = 24\,000$$

Aritmetický průměr odměn všech pracovníků je 24 000 korun.

14.2 nejvyšší odměnu.

Řešení:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{12}}{12}, \qquad \bar{x} = 24\,000 \quad \text{(viz řešení úlohy 14.1)}$$

$$24\,000 = \frac{4 \cdot 15\,000 + 3 \cdot 20\,000 + 2 \cdot 25\,000 + 2 \cdot 30\,000 + x_{12}}{12}$$

$$288\,000 = 230\,000 + x_{12}$$

$$x_{12} = 58\,000$$

Nejvyšší odměna činila 58 000 korun.

V záznamovém archu uveďte v obou částech úlohy celý **postup řešení**.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 15

Žebřík je postaven na dvorku s vodorovnou dlažbou a opřen o svislou zeď domu. Dosahuje do výšky 450 cm. Když přisuneme spodní konec žebříku o 88 cm blíž k domu, dosáhne žebřík ještě o 44 cm výš.

(CZVV)

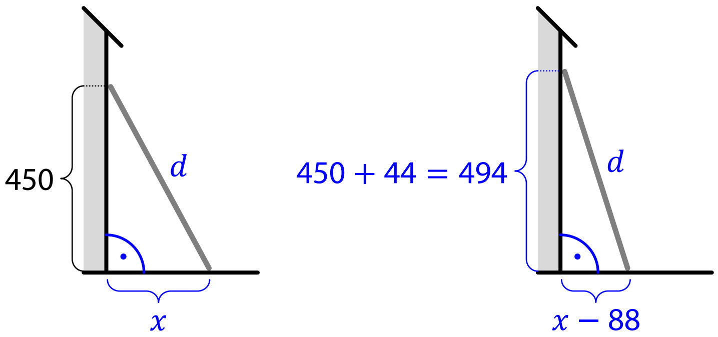
max. 2 body

15 Vypočtěte v cm délku žebříku.

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:

Délku žebříku (v cm) označme d, vzdálenost spodního konce žebříku od domu x.



$d^2 = x^2 + 450^2$ $\quad\quad$ $d^2 = (x - 88)^2 + 494^2$

$$x^2 + 450^2 = (x - 88)^2 + 494^2$$
$$x^2 + 450^2 = x^2 - 176x + 88^2 + 494^2$$
$$176x = 49\,280$$
$$x = 280$$

$$d^2 = x^2 + 450^2$$
$$d^2 = 280^2 + 450^2$$
$$d^2 = 280\,900$$
$$d = 530$$

Délka žebříku je 530 cm.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 16

V pondělí byli ve třídě všichni žáci a poměr počtu dívek ku počtu chlapců byl 3 : 2.
V úterý chyběly ve třídě pouze 3 dívky a uvedený poměr se změnil na 5 : 4.
Ve středu chyběli 2 chlapci a 2 dívky.
Ve čtvrtek chyběli pouze 2 chlapci.
V pátek nikdo nechyběl.

(CZVV)

max. 2 body

16 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (16.1–16.4), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

		A	N
16.1	V úterý bylo ve třídě přítomno 15 dívek.	☒	☐
16.2	Ve středu byl poměr počtu dívek ku počtu chlapců roven 3 : 2.	☐	☒
16.3	Ve čtvrtek bylo ve třídě přítomno 10 chlapců.	☒	☐
16.4	V pátek bylo ve třídě celkem 28 žáků.	☐	☒

Řešení:

Počet chlapců ve třídě označme c, počet dívek d.

Pondělí: $d : c = 3 : 2, \qquad d = \frac{3}{2}c$

Úterý: $(d-3) : c = 5 : 4, \qquad d - 3 = \frac{5}{4}c$

$$\frac{3}{2}c - 3 = \frac{5}{4}c$$

$$c = 12, \qquad d = 18$$

16.1 Úterý: $d - 3 = 15$
Tvrzení 16.1 je **pravdivé**.

16.2 Středa: $(d-2) : (c-2) = 16 : 10 \neq 15 : 10 = 3 : 2$
Tvrzení 16.2 je **nepravdivé**.

16.3 Čtvrtek: $c - 2 = 10$
Tvrzení 16.3 je **pravdivé**.

16.4 Pátek: $c + d = 30 \neq 28$
Tvrzení 16.4 je **nepravdivé**.

2 body

17 Je dán výraz:

$$\frac{100 \cdot \log_a a^{25}}{\log_5 25^{100}}$$

Který z následujících výrazů je pro každé $a \in (1; +\infty)$ ekvivalentní s daným výrazem?

A) 25

B) 12,5

C) $0{,}2a$

D) $0{,}5a^{25}$

E) Žádný z uvedených výrazů není s daným výrazem ekvivalentní.

Řešení:

$$\frac{100 \cdot \log_a a^{25}}{\log_5 25^{100}} = \frac{100 \cdot 25}{\log_5 (5^2)^{100}} = \frac{2\,500}{\log_5 5^{200}} = \frac{2\,500}{200} = 12{,}5$$

---

2 body

18 **Pro kterou z následujících nerovnic je množinou všech řešení v oboru R interval $(-1; 3)$?**

A) $\dfrac{x-3}{x^2+1} < 0$

B) $(x+1)(3-x) < 0$

C) $(x+1)(x-3) < 0$

D) $\dfrac{3-x}{x+1} \geq 0$

E) $\dfrac{x^2-9}{x+1} \geq 0$

Řešení:

A) $\dfrac{x-3}{x^2+1} < 0 \Leftrightarrow \quad x-3 < 0, \quad \mathrm{K_A} = (-\infty; 3)$

B) $(x+1)(3-x) < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) > 0, \quad \mathrm{K_B} = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$

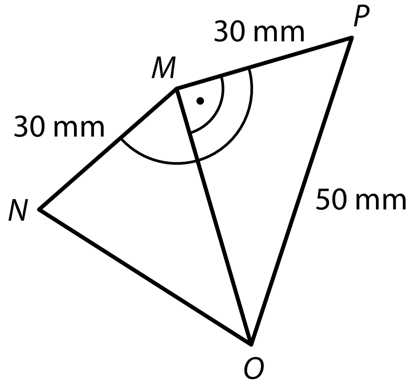
C) $(x+1)(x-3) < 0, \quad \mathrm{K_C} = (-1; 3)$

D) $\dfrac{3-x}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \quad \dfrac{x-3}{x+1} \leq 0, \quad \mathrm{K_D} = (-1; 3\rangle$

E) $\dfrac{x^2-9}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-3)(x+3)}{x+1} \geq 0, \quad \mathrm{K_E} = \langle -3; -1) \cup \langle 3; +\infty)$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 19

Ve čtyřúhelníku *MNOP* platí:
$|MN| = |MP| = 30$ mm, $|OP| = 50$ mm, $|\sphericalangle NMP| = 150°$, $|\sphericalangle OMP| = 90°$



(CZVV)

2 body

19 **Jaká je délka strany *NO*?**
Výsledek je zaokrouhlen na celé mm.

A) 31 mm

B) 33 mm

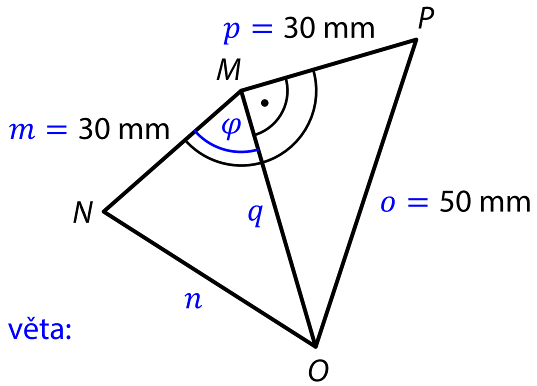
C) 36 mm

D) 40 mm

E) větší než 41 mm

Řešení:

Délky stran čtyřúhelníku *MNOP* označme po řadě m, n, o, p a délku úhlopříčky *MO* označme q. Velikost vnitřního úhlu trojúhelníku *MNO* při vrcholu *M* označme φ.



$m = p = 30$ mm, $\quad o = 50$ mm

$\varphi = 150° - 90° = 60°$

V pravoúhlém trojúhelníku *MOP* platí Pythagorova věta:

$o^2 = p^2 + q^2$

$q = \sqrt{o^2 - p^2}$

$q = \sqrt{50^2 - 30^2}$ mm $= 40$ mm

V trojúhelníku *MNO* užijeme kosinovou větu:

$n^2 = m^2 + q^2 - 2mq\cos\varphi$

$n = \sqrt{m^2 + q^2 - 2mq\cos\varphi}$

$n = \sqrt{30^2 + 40^2 - 2 \cdot 30 \cdot 40 \cdot \cos 60°}$ mm $= \sqrt{1300}$ mm $\doteq 36$ mm

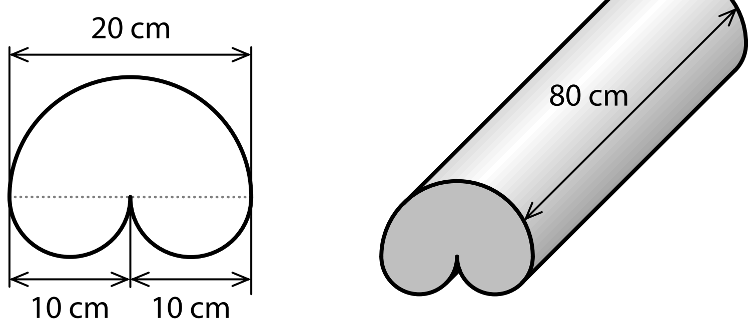
VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOHÁM 20–21

Molitanová balanční podložka je těleso složené ze tří půlválců (částí rotačních válců).

Podstavou největšího půlválce je půlkruh s průměrem 20 cm a podstavami dvou stejných menších půlválců jsou půlkruhy s průměrem 10 cm.

Výšky všech půlválců jsou 80 cm.

Podstava podložky



(*CZVV*)

2 body

20 Jaký je objem balanční podložky?

A) $4\pi\ \mathrm{dm}^3$

B) $5\pi\ \mathrm{dm}^3$

C) $6\pi\ \mathrm{dm}^3$

D) $8\pi\ \mathrm{dm}^3$

E) jiný objem

Řešení:

Poloměr podstavy největšího půlválce označme R, poloměr podstav menších půlválců r.
U balanční podložky označme obsah podstavy S_p, výšku v a objem V.

$$R = \frac{20\ \mathrm{cm}}{2} = 1\ \mathrm{dm}, \qquad r = \frac{10\ \mathrm{cm}}{2} = \frac{1}{2}\ \mathrm{dm}, \qquad v = 80\ \mathrm{cm} = 8\ \mathrm{dm}$$

$$V = S_\mathrm{p} \cdot v, \qquad S_\mathrm{p} = \frac{1}{2}\pi R^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot (R^2 + 2r^2)$$

$$V = \frac{1}{2}\pi \cdot (R^2 + 2r^2) \cdot v$$

$$V = \frac{1}{2}\pi \cdot \left[1^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \cdot 8\ \mathrm{dm}^3 = 6\pi\ \mathrm{dm}^3$$

2 body

21 **Jaký je povrch balanční podložky** (včetně obou podstav)**?**

A) menší než $1600\pi\ \text{cm}^2$

B) $1600\pi\ \text{cm}^2$

C) $1675\pi\ \text{cm}^2$

D) $1750\pi\ \text{cm}^2$

E) větší než $1750\pi\ \text{cm}^2$

Řešení:

Použijeme značení a vztahy z úlohy 20.
U balanční podložky dále označme obvod podstavy o_p, obsah pláště S_pl a povrch S.

$R = 10\ \text{cm}, \qquad r = 5\ \text{cm}, \qquad v = 80\ \text{cm}$

$S = S_\text{pl} + 2 \cdot S_\text{p}, \qquad S_\text{pl} = o_\text{p} \cdot v, \qquad S_\text{p} = \frac{1}{2}\pi \cdot (R^2 + 2r^2)$

$o_\text{p} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi r = \pi \cdot (R + 2r)$

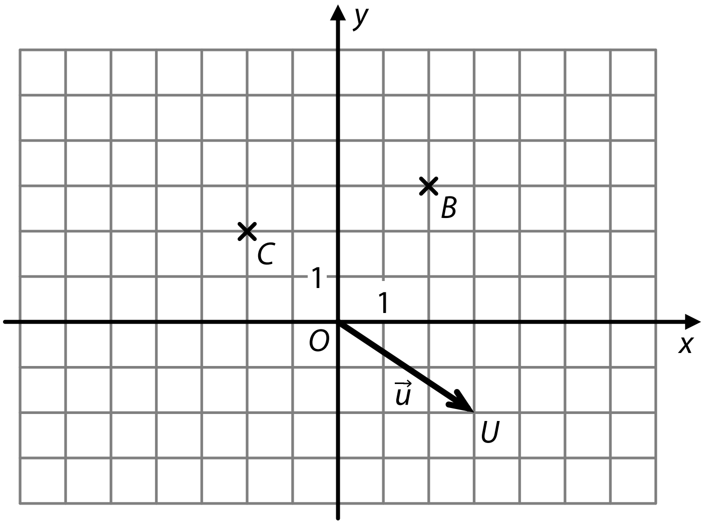
$S_\text{pl} = \pi \cdot (R + 2r) \cdot v$

$S = \pi \cdot (R + 2r) \cdot v + 2 \cdot \frac{1}{2}\pi \cdot (R^2 + 2r^2) = \pi \cdot (Rv + 2rv + R^2 + 2r^2)$

$S = \pi \cdot \left(10 \cdot 80 + 2 \cdot 5 \cdot 80 + 10^2 + 2 \cdot 5^2\right)\ \text{cm}^2 = 1750\pi\ \text{cm}^2$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 22

V kartézské soustavě souřadnic Oxy sestrojíme bod A tak, aby orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{OU}$ určovaly tentýž vektor $\vec{u}$.



Body B, C, U jsou mřížové body.

(CZVV)

2 body

22 Jaká bude vzdálenost bodů A, C?

A) menší než $\sqrt{10}$

B) $\sqrt{10}$

C) 5

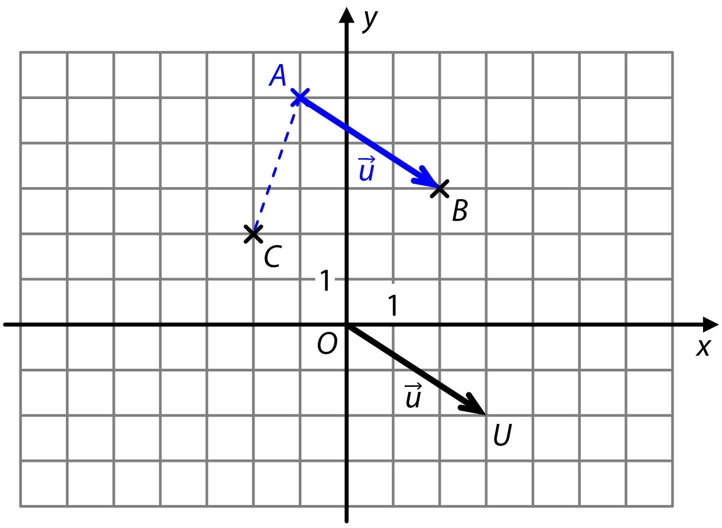
D) $\sqrt{50}$

E) větší než $\sqrt{50}$

Řešení:

Zakreslíme vektor $\vec{u}$ tak, aby koncovým bodem jeho umístění byl bod B. Počáteční bod tohoto umístění je bod A.

$|AC| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$



Početní řešení:

$B[2; 3]$, $C[-2; 2]$, $O[0; 0]$, $U[3; -2]$

$\vec{u} = U - O = (3; -2)$

$\vec{u} = B - A, \qquad A = B - \vec{u}$

$A = [2; 3] - (3; -2) = [-1; 5]$

$|AC| = \sqrt{\left(-2-(-1)\right)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{10}$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 23

V rovině leží body $A[-5; 3]$, $B[-1; 5]$ a přímka $o: y = -x$.
Bod S je střed úsečky AB.

(CZVV)

2 body

23 Který z následujících bodů je obrazem bodu *S* v osové souměrnosti s osou *o*?

A) $[-4; 3]$

B) $[-4; -3]$

C) $[4; -3]$

D) $[3; -4]$

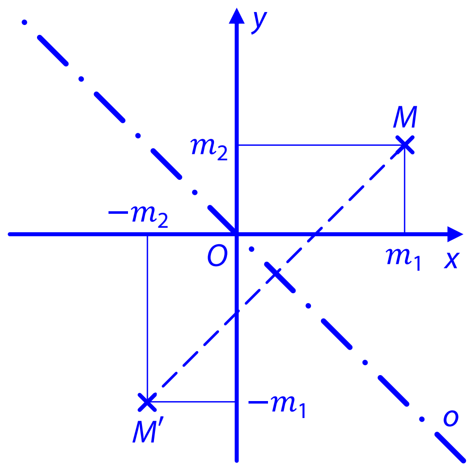
E) $[-3; -4]$

Řešení:

$$S = \left[\frac{-5 + (-1)}{2}; \frac{3 + 5}{2}\right] = [-3; 4]$$

Obrazem libovolného bodu $M[m_1; m_2]$ v osové souměrnosti s osou $o: y = -x$ je bod $M'[-m_2; -m_1]$.

Obrazem bodu $S[-3; 4]$ je tedy bod $[-4; 3]$.



VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 24

Z číslic 0, 1, 2, 3 jsou sestavena všechna trojmístná (neboli trojciferná) čísla, ve kterých se číslice **neopakují**. (Trojmístné číslo nezačíná číslicí 0.) *(CZVV)*

2 body

24 Jaká je pravděpodobnost, že při náhodném výběru jednoho z těchto čísel vybereme číslo liché?

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{2}{9}$

C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{4}{9}$

E) jiná hodnota pravděpodobnosti

Řešení:

Počet všech možných výsledků, tj. počet všech trojmístných čísel splňujících podmínky:
$3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$

Lichá trojmístná čísla mají na třetí pozici lichou číslici (1 nebo 3), což jsou 2 možnosti.
Na první pozici nemůže být číslice nula ani číslice ze třetí pozice, zbývají tedy 2 možnosti.
Po obsazení první a třetí pozice zbývají na druhou pozici 2 možnosti.

Počet výsledků příznivých požadovanému jevu L (náhodně vybrané číslo je liché):
$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Pravděpodobnost jevu L: $P(\text{L}) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$

max. 4 body

25 Každá funkce daná některým z předpisů 25.1–25.4 je definována pro všechna $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Přiřaďte ke každému předpisu funkce (25.1–25.4) útvar (A–F), na němž leží všechny body grafu této funkce.

25.1 $y = \dfrac{2x^3}{x}$ E

25.2 $y = \dfrac{x^2}{x \cdot \sqrt{2}}$ A

25.3 $y = \dfrac{x \cdot \sqrt{2}}{x}$ B

25.4 $y = \dfrac{x^2}{2x^3}$ F

A) přímka různoběžná se souřadnicovými osami

B) přímka rovnoběžná se souřadnicovou osou *x*

C) přímka rovnoběžná se souřadnicovou osou *y*

D) parabola souměrná podle souřadnicové osy *x*

E) parabola souměrná podle souřadnicové osy *y*

F) hyperbola

Řešení:

25.1 Pro $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ platí:

$$y = \frac{2x^3}{x} = 2x^2$$

Grafem kvadratické funkce $y = 2x^2$ je parabola souměrná podle souřadnicové osy *y*.

25.2 Pro $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ platí:

$$y = \frac{x^2}{x \cdot \sqrt{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x$$

Grafem lineární funkce $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot x$ je přímka různoběžná se souřadnicovými osami.

25.3 Pro $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ platí:

$$y = \frac{x \cdot \sqrt{2}}{x} = \sqrt{2}$$

Grafem konstantní funkce $y = \sqrt{2}$ je přímka rovnoběžná se souřadnicovou osou *x*.

25.4 Pro $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ platí:

$$y = \frac{x^2}{2x^3} = \frac{1}{2x} = \frac{0{,}5}{x}$$

Grafem lineární lomené funkce $y = \dfrac{0{,}5}{x}$ je hyperbola.

max. 3 body

26 **Pro $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ přiřaďte ke každému výrazu (26.1–26.3) jeho ekvivalentní vyjádření (A–E).**

26.1 $\mathrm{tg}\, x \cdot \sin 2x$ D

26.2 $\cos 2x + 1$ E

26.3 $\dfrac{1}{1 + \mathrm{cotg}^2 x}$ A

A) $\sin^2 x$

B) $\cos^2 x$

C) $2 \cdot \sin x$

D) $2 \cdot \sin^2 x$

E) $2 \cdot \cos^2 x$

Řešení:

26.1 $\mathrm{tg}\, x \cdot \sin 2x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \sin^2 x$

26.2 $\cos 2x + 1 = \cos^2 x - \sin^2 x + 1 = \cos^2 x + \cos^2 x = 2 \cdot \cos^2 x$

26.3 $\dfrac{1}{1 + \mathrm{cotg}^2 x} = \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)^2} = \dfrac{1}{\dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\sin^2 x}} = \sin^2 x$

ZKONTROLUJTE, ZDA JSTE DO ZÁZNAMOVÉHO ARCHU UVEDL/A VŠECHNY ODPOVĚDI.