

MATEMATIKA

MAMZD21C0T01

DIDAKTICKÝ TEST

Maximální bodové hodnocení: 50 bodů
Hranice úspěšnosti: 33 %

1 Základní informace k zadání zkoušky

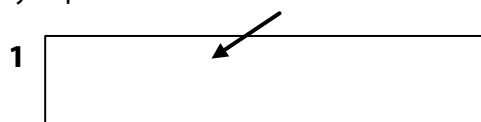
- **Didaktický test** obsahuje **26 úloh**.
- **Časový limit** pro řešení didaktického testu je **uveden na záznamovém archu**.
- **Povolené pomůcky:** psací a rýsovací potřeby, Matematické, fyzikální a chemické tabulky a kalkulátor bez grafického režimu, bez řešení rovnic a úprav algebraických výrazů. Nelze použít programovatelný kalkulátor.
- U každé úlohy je uveden maximální počet bodů.
- Odpovědi píšete do záznamového archu.
- Poznámky si můžete dělat do testového sešitu, nebudou však předmětem hodnocení.
- **Nejednoznačný nebo nečitelný zápis odpovědi bude považován za chybné řešení.**
- První část didaktického testu (úlohy 1–15) tvoří **úlohy otevřené**.
- Ve druhé části didaktického testu (úlohy 16–26) jsou uzavřené úlohy, které obsahují nabídku odpovědí. U každé úlohy nebo podúlohy je **právě jedna odpověď správná**.
- Za neuvedené řešení či za nesprávné řešení úlohy jako celku **se neudělují záporné body**.

2 Pravidla správného zápisu odpovědí

- Odpovědi zaznamenávejte **modře nebo černě** písíci propisovací tužkou, která píše **dostatečně silně a nepřerušovaně**.
- Budete-li rýsovat obyčejnou tužkou, následně obtáhněte čáry propisovací tužkou.
- Hodnoceny budou **pouze odpovědi uvedené v záznamovém archu**.

2.1 Pokyny k otevřeným úlohám

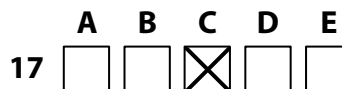
- Výsledky **píšete čitelně** do vyznačených bílých polí.



- Je-li požadován celý postup řešení, uveďte jej do záznamového archu. Pokud uvedete pouze výsledek, nebudou vám přiděleny žádné body.
- **Zápisy uvedené mimo** vyznačená bílá pole **nebudou hodnoceny**.
- Chybný zápis přeškrtněte a nově zapíšte správné řešení.

2.2 Pokyny k uzavřeným úlohám

- Odpověď, kterou považujete za správnou, zřetelně zakřížkujte v příslušném bílém poli záznamového archu, a to přesně z rohu do rohu dle obrázku.



- Pokud budete chtít následně zvolit jinou odpověď, pečlivě zabarvete původně zakřížkované pole a zvolenou odpověď vyznačte křížkem do nového pole.



- Jakýkoliv jiný způsob záznamu odpovědi a jejich oprav bude považován za nesprávnou odpověď.

TESTOVÝ SEŠIT NEOTVÍREJTE, POČKEJTE NA POKYN!

1 bod

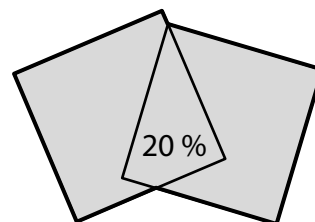
1 Pro $a \in \mathbb{N}$ upravte výraz a vyjádřete jej ve tvaru odmocniny o základu a .

$$a^{\frac{1}{4}} : \sqrt[6]{a} =$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 2

Sloučením dvou **shodných** čtverců, které se částečně překrývají, vznikl šedý rovinný útvar.

Obsah části, v níž se oba čtverce překrývají, tvoří 20 % obsahu **celého** šedého útvaru.



(CZVV)

1 bod

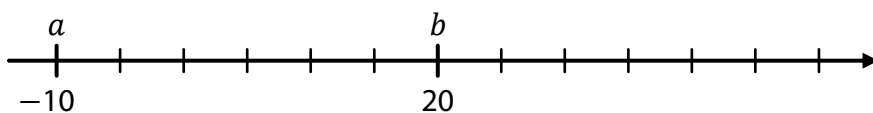
2 Určete, kolik procent obsahu celého šedého útvaru tvoří obsah jednoho čtverce.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 3

Na číselné ose je vyznačeno 12 stejných dílků a obrazy čísel $a = -10$, $b = 20$.

Pro čísla x , y platí:

Číslo x je trojnásobek čísla y a zároveň číslo y je o 30 menší než číslo x .



(CZVV)

max. 2 body

3 Na číselné ose vyznačte a popište obrazy čísel x , y .

max. 2 body

4 Pro $y \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ zjednodušte:

$$\frac{\frac{y}{3} - \left(\frac{y}{3}\right)^2}{3y - 9} =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 5

Na stejné cívky se navíjejí ocelová lana. Hmotnost **prázdné cívky** je c tun, hmotnost samotného **lana** na plně navinuté cívce je ℓ tun a hmotnost lana poloviční délky je $0,5\ell$ tun.

Jedna plně navinutá cívka a 11 prázdných cívek mají dohromady o 4 tuny menší hmotnost než 6 cívek s lany polovičních délek.

(CZVV)

max. 2 body

5 Vyjádřete veličinu ℓ v závislosti na veličině c .

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

max. 2 body

6 V oboru \mathbb{R} řešte:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 6} - \frac{3}{2} = 0$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

max. 2 body

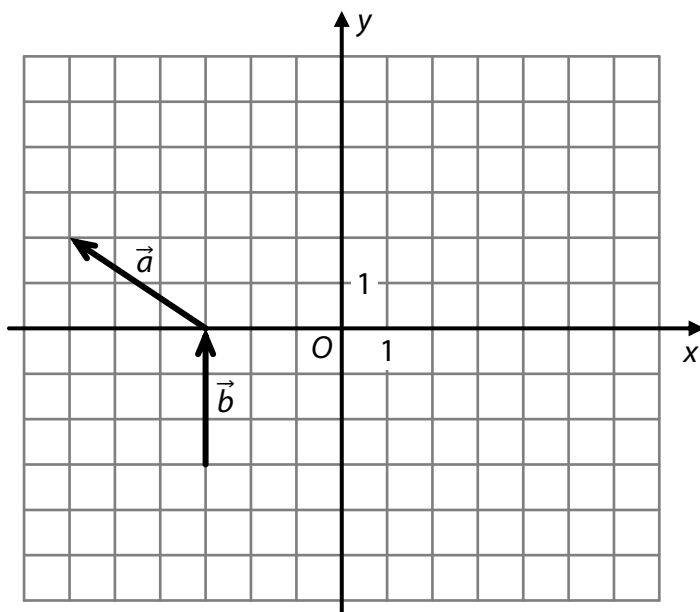
7 Čtverec $ABCD$ má vrchol $A[2; -2]$ a střed $S[3; 0]$.

7.1 Zapište souřadnice vrcholu C čtverce $ABCD$.

7.2 Zapište obecnou rovnici přímky BD .

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 8

V kartézské soustavě souřadnic Oxy jsou umístěny vektory \vec{a} a \vec{b} .
(Počáteční i koncové body umístění těchto vektorů jsou v mřížových bodech.)



(CZVV)

max. 2 body

8

8.1 Pro vektor $\vec{u} = (-6; u_2)$ platí:

$$\vec{a} \cdot \vec{u} = 0$$

Vypočítejte chybějící souřadnici u_2 vektoru \vec{u} .

8.2 Zakreslete vektor $\vec{v} = \vec{b} - \vec{a}$ tak, aby bod O byl počátečním bodem jeho umístění v kartézské soustavě souřadnic Oxy .

V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

9 **V oboru \mathbb{R} řešte:**

$$\frac{x^2 - 5x}{x} \leq 0$$

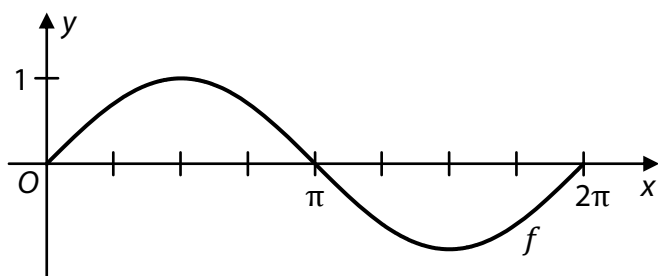
1 bod

10 V oboru \mathbb{R} řešte:

$$2^{5x} - \log_5 \sqrt{5} = 0$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 11

V kartézské soustavě souřadnic Oxy je sestaven graf funkce $f: y = \sin x$ pro $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$.



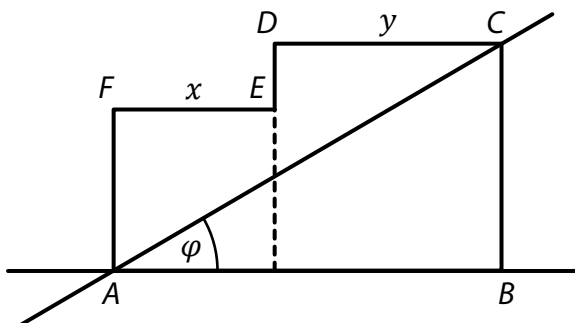
(CZVV)

max. 2 body

11 Vypočtěte všechny hodnoty proměnné $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, pro něž je $f(x) = -0,5$.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 12

Šestiúhelník $ABCDEF$ na obrázku je složen ze dvou čtverců, jejichž strany mají délky x, y .
Odchylka přímek AB a AC je φ .



(CZVV)

1 bod

12 Vypočtete poměr $y : x$, jestliže platí:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{9}{13}$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 13

Ze skupiny 25 žáků, ve které je 18 dívek a 7 chlapců, se vylosují dva žáci.

(CZVV)

1 bod

13 Určete pravděpodobnost, že se vylosuje smíšený pár (dívka a chlapec).

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Emil, Pavel a Martin koupili společně dárek za 2 975 korun.

Pavel přispěl částkou o 20 % vyšší než Emil.

Emil přispěl částkou, která je o 20 % menší než aritmetický průměr příspěvků Pavla a Martina.

(CZVV)

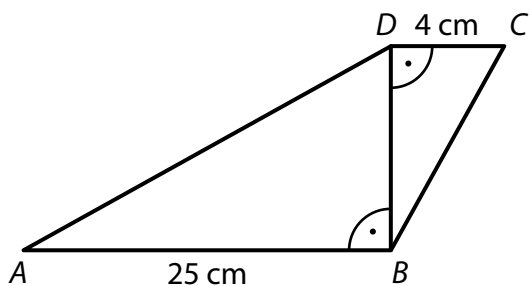
max. 3 body

14 Vypočtěte, jakou částkou přispěl Martin.

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení** (popis neznámých, sestavení rovnice, resp. soustavy rovnic, řešení a odpověď).

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 15

V lichoběžníku $ABCD$ mají základny AB a CD délky 25 cm a 4 cm. Úhlopříčka BD je současně výškou lichoběžníku a rozděluje ho na dva trojúhelníky, které jsou podobné.



(CZVV)

max. 2 body

15 Vypočtete v cm^2 obsah lichoběžníku $ABCD$.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 16

V pravoúhlém trojúhelníku ABC má přepona AB délku c , odvěsna AC délku b a zbývající strana délku a . Vnitřní úhel při vrcholu A má velikost α a při vrcholu B velikost β .

(CZVV)

max. 2 body

16 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (16.1–16.4), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

16.1 $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$

A N

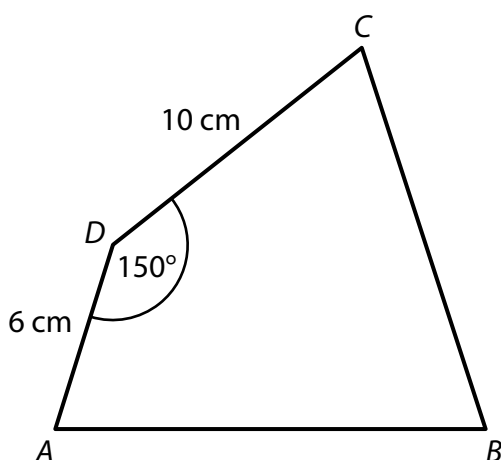
16.2 $\frac{a+b}{c} = 1$

16.3 $c \cdot \sin \alpha = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$

16.4 $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 17

Ve čtyřúhelníku $ABCD$ o obsahu 70 cm^2 platí: $|\sphericalangle ADC| = 150^\circ$, $|CD| = 10 \text{ cm}$, $|AD| = 6 \text{ cm}$.



(CZVV)

2 body

17 Jaký je obsah trojúhelníku ABC ?

- A) menší než 43 cm^2
- B) 44 cm^2
- C) 49 cm^2
- D) 55 cm^2
- E) větší než 56 cm^2

18 Je dán výraz:

$$V(a) = \frac{(a+4)(a^2-4)(a+3)^2}{(a^2-9)(a-2)^2}$$

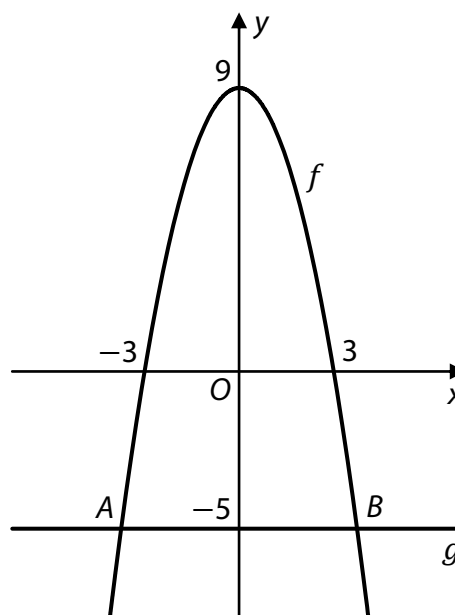
Hodnota výrazu $V(a)$ je rovna nule pro

- A) alespoň tři celá čísla.
- B) právě dvě záporná celá čísla.
- C) právě jedno kladné a jedno záporné celé číslo.
- D) právě dvě kladná celá čísla.
- E) právě jedno celé číslo.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 19

V kartézské soustavě souřadnic Oxy je sestojen graf kvadratické funkce f a graf konstantní funkce g .

Průsečíky grafů funkcí f a g jsou body A, B .



(CZVV)

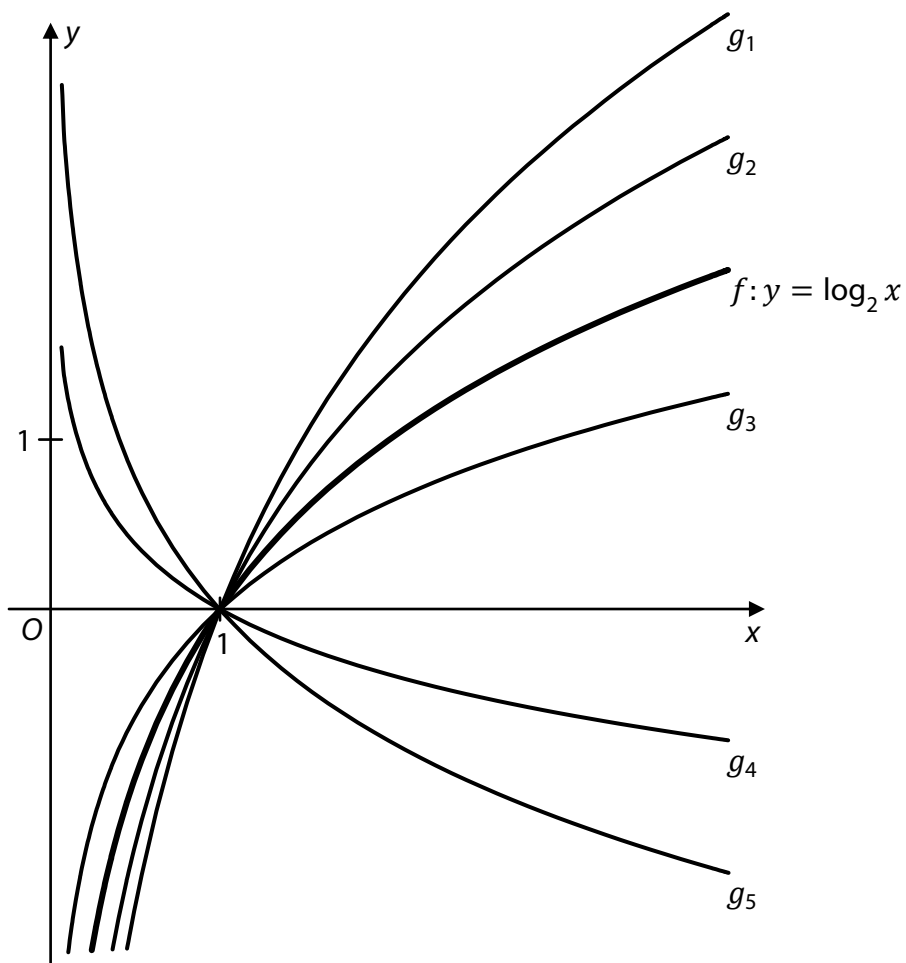
2 body

19 **Jaká je vzdálenost bodů A, B ?**

- A) $2\sqrt{14}$
- B) 7,6
- C) $2\sqrt{15}$
- D) 8
- E) jiná vzdálenost

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 20

V kartézské soustavě souřadnic Oxy je sestaven graf funkce $f: y = \log_2 x$ a grafy pěti dalších logaritmických funkcí g_1-g_5 s předpisy $y = \log_a x$, v nichž se základy a vzájemně liší. Všechny tyto funkce mají definiční obor $(0; +\infty)$.



(CZVV)

2 body

20 Kolik z daných funkcí g_1-g_5 má základ menší než 2 (tj. $a < 2$)?

- A) nelze určit
- B) 1
- C) 2
- D) 3
- E) 4

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 21

V rizikové oblasti se počty nově nakažených osob evidují denně vždy v 18 hodin. V poslední době pozorujeme exponenciální růst šíření nákazy a zatím se nepředpokládá změna tohoto trendu. Tedy denní počty nově nakažených osob odpovídají po sobě jdoucím členům geometrické posloupnosti zaokrouhleným na celá čísla.

V sobotu (tj. před 2 dny) bylo evidováno 729 nově nakažených osob, v pondělí (tj. dnes) 810 osob a v pátek tohoto týdne (tj. ode dneška za 4 dny) lze očekávat n nově nakažených osob.

(CZVV)

2 body

21 Ve kterém intervalu leží n ?

- A) $(810; 980)$
- B) $(980; 1030)$
- C) $(1030; 1080)$
- D) $(1080; 1230)$
- E) $(1230; 2460)$

2 body

22 V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$a_3 = 8$$

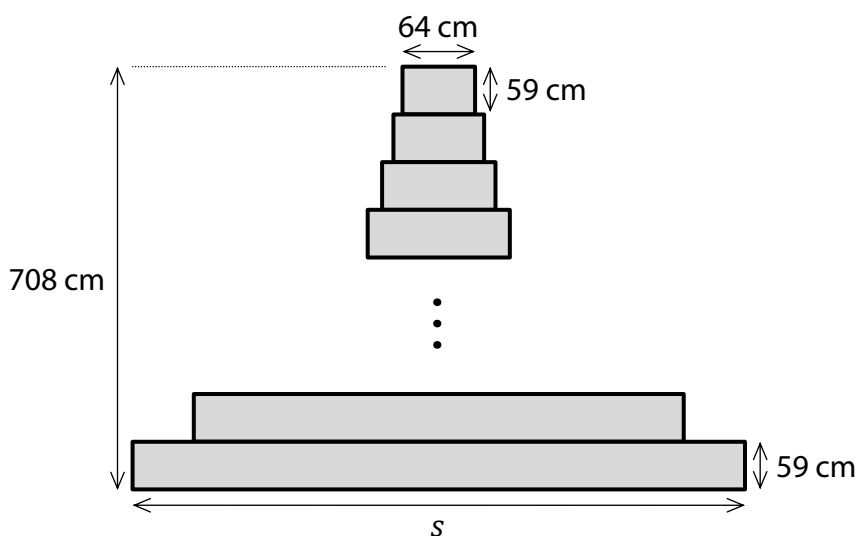
$$a_5 = a_3 + a_4$$

Které z následujících tvrzení je nepravdivé?

- A) $a_1 + a_2 + a_3 = 0$
- B) $a_2 + a_3 = 8$
- C) $a_1 + a_3 = a_2$
- D) $a_2 + a_4 = a_3$
- E) $a_2 + a_3 + a_4 = a_5$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 23

Na zeď haly je promítnut obrazec vysoký 708 cm. Obrazec je složen z obdélníků, první obdélník shora má výšku 59 cm a šířku 64 cm. Každý další obdélník má rovněž výšku 59 cm, ale šířku má vždy o čtvrtinu větší, než je šířka předchozího obdélníku. (Mezi obdélníky nejsou žádné mezery.)



(CZVV)

2 body

23 Jaká je šířka s posledního obdélníku?

Výsledek je zaokrouhlen na celé cm.

- A) 745 cm
- B) 768 cm
- C) 809 cm
- D) 931 cm
- E) jiná šířka

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 24

Z šesti číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5 vytváříme pětímístná (neboli pěticiperná) čísla, v jejichž zápisu jsou v každé trojici sousedních číslic tři různé číslice. (Pětímístné číslo nezačíná číslicí 0.)

Např. v zápisu pětímístného čísla 10 240 obsahuje každá trojice sousedních číslic (tj. 102, 024 a 240) tři různé číslice.

(CZVV)

2 body

24 Kolik pětímístných čísel splňujících uvedené podmínky lze vytvořit?

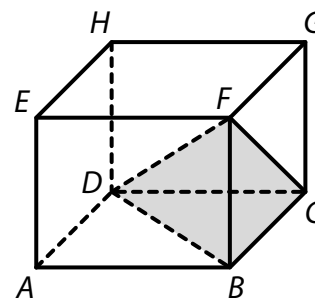
- A) 720
- B) 1024
- C) 1600
- D) 1920
- E) 2000

max. 4 body

25 Přičadte ke každé úloze (25.1–25.4) odpovídající výsledek (A–F).

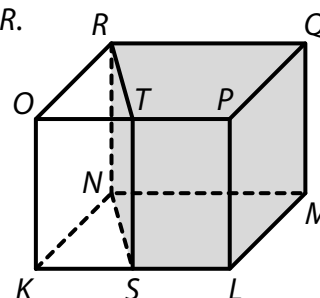
- 25.1 V kvádru $ABCDEFGH$ je umístěn trojboký jehlan $BCDF$.
Objem kvádru $ABCDEFGH$ je 240 cm^3 .

Jaký je objem trojbokého jehlanu $BCDF$?



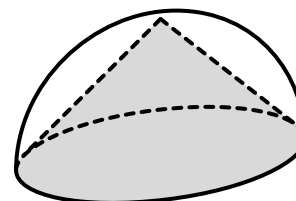
- 25.2 V kvádru $KLMNOPQR$ je umístěn čtyřboký hranol $SLMNTPQR$.
Body S, T jsou po řadě středy hran KL, OP .
Objem čtyřbokého hranolu $SLMNTPQR$ je 24 cm^3 .

Jaký je objem kvádru $KLMNOPQR$?



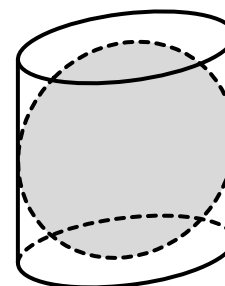
- 25.3 Do polokoule je vepsán rotační kužel (podstavy obou těles splývají, vrchol kužele leží na hranici polokoule).
Objem rotačního kužele je 24 cm^3 .

Jaký je objem polokoule?



- 25.4 Do rovnostranného rotačního válce je vepsána koule (koule se dotýká pláště válce i obou podstav válce).
Objem koule je 24 cm^3 .

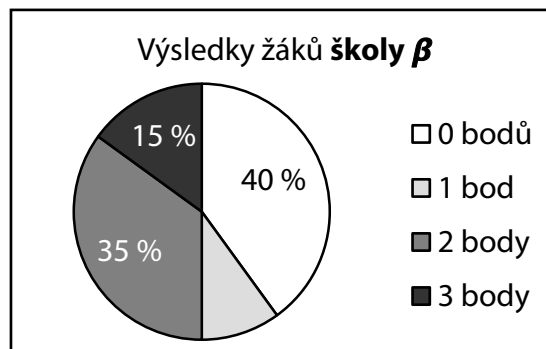
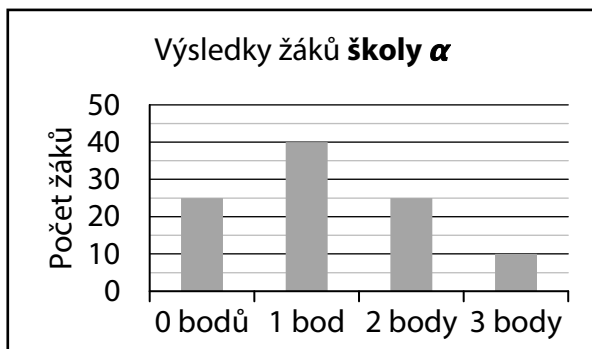
Jaký je objem rotačního válce?



- A) menší než 30 cm^3
- B) 30 cm^3
- C) 32 cm^3
- D) 36 cm^3
- E) 40 cm^3
- F) větší než 40 cm^3

VÝCHOZÍ TEXT, DIAGRAMY A TABULKY K ÚLOZE 26

Všichni žáci tří škol (α , β , γ) se zúčastnili soutěže, v níž každý žák získal 0, 1, 2, nebo 3 body. Výsledky žáků jsou zaznamenány v následujících diagramech a tabulkách.



Výsledky žáků **školy γ**

Počet bodů	0	1	2	3
Počet žáků		0	25	35

Pro každou školu zvlášť byly z výsledků žáků vypočteny charakteristiky polohy – medián, modus a aritmetický průměr. Ve škole γ byl průměrný počet bodů 1,24. Mezi mediány všech škol se zjistí nejnižší hodnota, stejně tak mezi mody a aritmetickými průměry.

	Medián	Modus	Aritmetický průměr
Škola α			
Škola β			
Škola γ			1,24
Nejnižší hodnota			

(CZVV)

max. 3 body

26 Přiřadte ke každé charakteristice polohy (26.1–26.3) výčet všech škol (A–E), které dosáhly nejnižší zjištěné hodnoty této charakteristiky.

26.1 Medián _____

26.2 Modus _____

26.3 Aritmetický průměr _____

- A) pouze škola α
- B) pouze škola β
- C) pouze škola γ
- D) škola α i škola β
- E) škola β i škola γ

ZKONTROLUJTE, ZDA JSTE DO ZÁZNAMOVÉHO ARCHU UVEDL/A VŠECHNY ODPOVĚDI.